.Problema para ajudar na escola: Transformados em múltiplos de 30

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(**ONEM**, 2008 – Adaptado) Quantos números com três algarismos distintos satisfazem a propriedade abaixo?

- Ao substituir o maior algarismo por 1, o número obtido é múltiplo de 30.

Ajuda

Divisibilidade por 3: Para um número natural ser divisível por 3, é necessário e suficiente que a soma de seus algarismos seja divisível por 3.

Divisibilidade por 10**:** Para um número natural ser divisível por 10, é necessário e suficiente que ele termine em 0.

Divisibilidade por 30: Para um número natural ser divisível por 30, é necessário e suficiente que ele seja divisível simultaneamente por 3 e 10.

Solução

Suponhamos que $N=abc$ seja um número de três algarismos distintos que satisfaz a propriedade exigida pelo problema.

(Observe que, aqui, a notação abc não indica um produto e sim a representação de um número de três algarismos no sistema decimal.)

Como a propriedade em questão se refere ao maior algarismo de N, vamos analisar separadamente três situações: o maior algarismo de N é a, b ou c.

(1) O maior algarismo é c:

Este é o caso mais simples de ser analisado. Observe que ao substituirmos c por 1, ficamos com o número $\boxed{S=ab1}$ que particularmente não é um múltiplo de 10, pois não termina em 0. Consequentemente, o número S resultante da substituição não é múltiplo de 30 e, portanto, o número N não satisfaz, de fato, a propriedade exigida.

Com isso, este caso está eliminado, ou seja, o maior algarismo de N não pode ser c.

(2) O maior algarismo é b:

Neste caso, ao substituirmos b por 1, ficamos com o número $\boxed{S=a1c}$.

- Como S é um múltiplo de 30, particularmente S é um múltiplo de 10 e, assim, $c=0$. Com isso, S é da forma $S=a10$.
- Como S é um múltiplo de 30, particularmente $S=a10$ é um múltiplo de 3. Logo, $a+1+0=a+1$ é divisível por 3.

  Como os três dígitos de S são distintos, temos nove possibilidades para o algarismo a. Vamos testá-las:

  - Se $a=1$, então $N=110$ e 110 **não é um múltiplo** de 3.
  - Se $a=2$, então $N=210$ e 210 **é um múltiplo** de 3.
  - Se $a=3$, então $N=310$ e 310 **não é um múltiplo** de 3.
  - Se $a=4$, então $N=410$ e 410 **não é um múltiplo** de 3.
  - Se $a=5$, então $N=510$ e 510 **é um múltiplo** de 3.
  - Se $a=6$, então $N=610$ e 610 **não é um múltiplo** de 3.
  - Se $a=7$, então $N=710$ e 710 **não é um múltiplo** de 3.
  - Se $a=8$, então $N=810$ e 810 **é um múltiplo** de 3.
  - Se $a=9$, então $N=910$ e 910 **não é um múltiplo** de 3.

Temos então apenas três possibilidades para S: $210,\ 510,\ 810$. Mas observe que:

► Se $S=210$, então $N=2b0$, com $b>2$, já que b é o maior algarismo neste caso. Então, teremos sete casos possíveis para b: $b=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$. Dessa forma, temos neste caso $\boxed{7}$ possibilidades de valores para N.

► Se $S=510$, então $N=5b0$, com $b>5$ (b é o maior algarismo). Assim, teremos quatro casos possíveis para b: $b=6,\ 7,\ 8,\ 9$. Logo, conseguimos mais $\boxed{4}$ possibilidades de valores para N.

► Se $S=810$, então $N=8b0$, com $b>8$. Portanto, teremos um caso possível para b: $b=9$ e mais $\boxed{1}$ possibilidade de valor para N.

Temos então neste segundo caso $7+4+1=12$ números N que satisfazem a propriedade requerida.

(3) O maior algarismo é a:

Neste caso, ao substituirmos a por 1, ficamos com o número $\boxed{S=1bc}$.

- Como S é um múltiplo de 30, particularmente S é um múltiplo de 10 e, assim, $c=0$. Com isso, S é da forma $S=1b0$.
- Como S é um múltiplo de 30, particularmente $S=1b0$ é um múltiplo de 3. Logo, $1+b+0=b+1$ é divisível por 3. Fazendo as mesmas análises do caso anterior, obtemos três possibilidades para S: $120,\ 150,\ 180$.

Agora, observe que:

► Se $S=120$, então $N=a20$, com $a>2$, já que aqui a é o maior algarismo. Então, teremos sete casos possíveis para a: $a=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$. Temos neste caso $\boxed{7}$ possibilidades de valores para N.

► Se $S=150$, então $N=a50$, com $a>5$ (a é o maior algarismo). Assim, teremos quatro casos possíveis para a: $a=6,\ 7,\ 8,\ 9$. Portanto, conseguimos mais $\boxed{4}$ possibilidades de valores para N.

► Se $S=180$, então $N=a80$, com $a>8$. Com isso, teremos um caso possível para b: $b=9$ e mais $\boxed{1}$ possibilidade de valor para N.

Neste terceiro caso, obtemos também $7+4+1=12$ números N que satisfazem a propriedade requerida.

Dessa forma, por **(1)**, **(2)** e **(3)**, concluímos que existem $\boxed{12+12=24}$ números que satisfazem as condições do problema.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.