



## .Problema para ajudar na escola: Muitos pés de alface!



### Problema

(A partir do 8º ano do E. F.)

(ONEM, 2004 – Adaptado) Um agricultor colheu toda a sua plantação de pés de alface e pediu para os seus quatro filhos que agrupassem os pés colhidos, preparando-os para o transporte.

- O primeiro filho tentou agrupar os pés de alface de onze em onze, mas faltou um.
- O segundo filho tentou agrupar os pés de alface de treze em treze e sobraram doze pés.
- O terceiro filho tentou agrupar os pés de alface de sete em sete e também faltou um.
- O quarto filho, finalmente, agrupou os pés de alface de doze em doze e não faltaram e nem sobraram pés.



Quantos pés de alface o agricultor colheu, sabendo que foram menos de 8 000?

### Solução 1

Seja  $C$  o número de pés de alface colhidos pelo agricultor e observe que:

- Pela contagem do primeiro filho, se tivesse sido colhido um pé de alface a mais, seria possível agrupar a colheita em grupos de onze unidades de pés de alface. Assim,  
▶  $C + 1$  é um número múltiplo de 11.  $(i)$
- Pela contagem do segundo filho, ao separar a colheita em grupos de treze pés de alface, sobraram 12 unidades. Perceba que se tivesse sido colhido um pé de alface a mais teria sido possível separar a colheita de treze em treze pés de alface. Dessa forma,  
▶  $C + 1$  é também um número múltiplo de 13.  $(ii)$
- Pela contagem do terceiro filho, se tivesse sido colhido um pé de alface a mais, seria possível separar os pés de alface em grupos de sete unidades. Por essa informação, concluímos que  
▶  $C + 1$  é um número múltiplo de 7.  $(iii)$

Observe que 7, 11 e 13 são números primos distintos e, portanto, não têm fatores em comum. Então para  $C + 1$  ser, simultaneamente, um múltiplo desses três números, conforme indicam as conclusões  $(i)$ ,  $(ii)$  e  $(iii)$ ,  $C + 1$  deverá ser múltiplo do produto  $7 \times 11 \times 13 = 1001$ .

Vamos, então procurar os múltiplos não nulos de 1001, mas não sem antes lembrar que foram colhidos menos de 8 000 pés de alface:

$$\begin{aligned} C + 1 &= 1001 \times 1 = 1001, \text{ donde } C = 1000 < 8000; \\ C + 1 &= 1001 \times 2 = 2002, \text{ donde } C = 2001 < 8000; \\ C + 1 &= 1001 \times 3 = 3003, \text{ donde } C = 3002 < 8000; \\ C + 1 &= 1001 \times 4 = 4004, \text{ donde } C = 4003 < 8000; \\ C + 1 &= 1001 \times 5 = 5005, \text{ donde } C = 5004 < 8000; \\ C + 1 &= 1001 \times 6 = 6006, \text{ donde } C = 6005 < 8000; \\ C + 1 &= 1001 \times 7 = 7007, \text{ donde } C = 7006 < 8000; \\ C + 1 &= 1001 \times 8 = 8008; \text{ aqui teríamos um valor de } C \text{ maior do que } 8000. \end{aligned}$$

Perceba que temos ainda a informação da contagem do quarto filho do agricultor!

- Pela contagem do quarto filho, agrupando de doze em doze não faltam e nem sobram pés de alface. Isso significa que  
▶  $C$  é um número múltiplo de 12.

Como todo múltiplo de 12 é um número par, da relação dos sete possíveis valores para  $C$  já eliminamos de imediato os valores ímpares e ficamos com as seguintes possibilidades:

1000, 3002, 5004, e 7006.

Desses quatro valores, apenas 5004 é múltiplo de 12.

$$\begin{array}{r} 1000 \overline{) 12} \\ 4 \ 83 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3002 \overline{) 12} \\ 2 \ 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5004 \overline{) 12} \\ 0 \ 417 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7006 \overline{) 12} \\ 10 \ 583 \end{array}$$

Assim, o agricultor colheu exatamente **5 004** pés de alface.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

### Solução 2

Sabemos que:

- agrupando de 7 em 7 faltou um pé de alface;
- agrupando de 11 em 11 faltou 1 um pé de alface;
- agrupando de 13 em 13 sobraram 12 pés de alface (ou seja, também faltou 1);
- agrupando de 12 em 12 deu certo;
- o número de pés de alface é menor que 8000.

Como 7, 11 e 13 são primos distintos, a resposta tem que ser um número múltiplo deles menos 1, e essa diferença deve ser um múltiplo de 12 ao mesmo tempo.

Assim encontramos os múltiplos de 7, 11 e 13 ( $7 \times 11 \times 13$ ) menores do que 8000 e tiramos 1:

- 1001-1=1000
- 2002-1= 2001
- 3003-1= 3002
- 4004-1=4003
- 5005-1=5004
- 6006-1=6005
- 7007-1=7006.

Descartamos os ímpares, pois não seriam múltiplos de 12, e testamos os que restaram dividindo-os por 12. O único número cuja divisão por 12 é exata é o 5004.

Assim, a resposta para esse problema é: **foram colhidos 5004 pés de alface!**

Solução elaborada pelo Clube **INTELIGÊNIOS**, com colaboração dos Moderadores do Blog.