.Problema para ajudar na escola: Muitas raízes...

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(**ONEM**, 2005 – Adaptado) Seja x um número real maior do que 1.

Determine o número natural não nulo n tal que

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x}}}{x}}=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}}}.$$

Lembretes

São bem conhecidas as seguintes definições envolvendo potências e radicais:

► **Potência de expoente inteiro negativo:** Se a é um número real não nulo e n é um número natural, então a potência a^{-n} é assim definida:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ .$$

► **Potência de expoente racional:** Se a é um número real positivo, n é um número natural não nulo e m é um número inteiro, então:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ .$$

As propriedades de potências e raízes nos permitem estender essas duas definições para expoentes não necessariamente inteiros.

(1) Potência de expoente negativo: Se a é um número real não nulo e n é um número racional positivo, então:

$$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$$

(2) Potência de expoente racional: Se a é um número real positivo, n é um número natural não nulo e m é um número racional, então:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

Podemos estender as propriedades de potências e raízes com expoentes inteiros para potências e raízes com expoentes racionais.

Particularmente nos interessam duas propriedades:

(3) Quociente de potências com a mesma base: Se a é um número real positivo e m e n são números racionais, então:

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

(4) Potência de potência: Se a é um número real positivo e m e n são números racionais, então:

$$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$$

(5) Igualdade de potências de mesma base: Se a é um número real positivo e diferente de 1 e m e n são números reais, então:

$$a^n=a^m\iff m=n$$

Solução

Para facilitar a aplicação dos **Lembretes**, vamos simplificar separadamente cada um dos lados da igualdade apresentada no problema.

Veja que

$$\boxed{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x}}}{x}}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{1}{x^1}}}{x}}}{x}}\overset{(1)}{=}\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^{-1}}}{x}}}{x}}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt[2]{x^{-1}}}{x}}}{x}}\overset{(2)}{=}\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{x^{\frac{-1}{2}}}{x}}}{x}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{x^{\frac{-1}{2}}}{x}}}{x}}\overset{(3)}{=}\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{x^{\frac{-1}{2}-1}}}{x}}$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{x^{-\frac{3}{2}}}}{x}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{x^{-\frac{3}{2}}}}{x}}\overset{(2)}{=}\sqrt[4]{\frac{x^{\frac{-\frac{3}{2}}{3}}}{x}}=\sqrt[4]{\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x}}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^1}}\overset{(3)}{=}\sqrt[4]{x^{-\frac{1}{2}-1}}=\sqrt[4]{x^{-\frac{3}{2}}}\overset{(2)}{=}x^{\frac{-\frac{3}{2}}{4}}=\boxed{x^{-\frac{3}{8}}}$$

e

$$\boxed{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}}}}=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}}}\overset{(2)}{=}\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{4}}}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{4}}}}\overset{(2)}{=}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\frac{n}{4}}{3}}}=\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{12}}}$$

$$=\sqrt[2]{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{12}}}\overset{(2)}{=}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\frac{n}{12}}{2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{x^1}\right)^{\frac{n}{24}}\overset{(1)}{=}\left(x^{-1}\right)^{\frac{n}{24}}\overset{(4)}{=}\boxed{x^{-\frac{n}{24}}}\ .$$

Dessa forma, como

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x}}}{x}}=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}}}\ ,$$

segue que:

$$x^{-\frac{3}{8}}=x^{-\frac{n}{24}}\ .$$

Mas sabemos que x é um número real maior do que 1, logo, utilizando o **Lembrete (5)**, segue dessa última igualdade que :

$$-\frac{3}{8}=-\frac{n}{24}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{n}{24}$$

$$n=24\cdot\frac{3}{8}$$

$$\boxed{n=9}\ .$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.