.Problema para ajudar na escola: Expressão máxima

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

(**ONEM**, 2008) Seja ABC um triângulo tal que $AB = 3\,cm$, $BC = 5\,cm$ e $CA = 4\,cm$.
Se P é um ponto do plano determinado pelos vértices desse triângulo, qual o valor máximo da expressão

$\boxed{2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2}$?

Notação: Se X e Y são pontos de um plano, estamos indicando por XY a distância entre esses dois pontos.

AJUDA

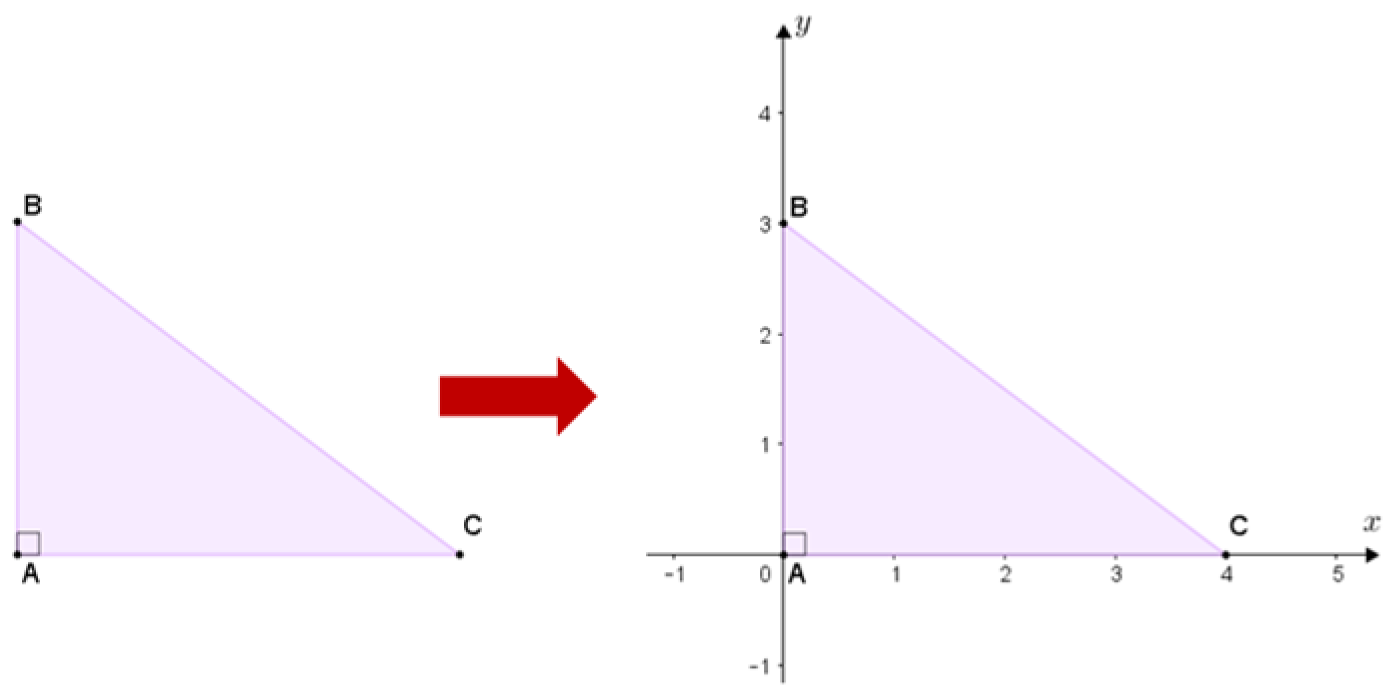
Para resolver este problema vamos utilizar noções básicas de plano cartesiano.
Talvez o vídeo abaixo possa ajudar!

Clique AQUI para abrir o vídeo.

Solução

Vamos transformar esse problema geométrico em um problema algébrico, já que a expressão $\boxed{2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2}$ que vamos majorar não está associada a alguma forma geométrica conhecida.
Veja no vídeo disponibilizado abaixo que transformar problemas geométricos em problemas algébricos é a essência da chamada ***Geometria Analítica*** e faremos isso definindo um sistema cartesiano conveniente, a partir do triângulo ABC definido no problema.
Observe que $3^2 + 4^2 = 5^2$; assim, o triângulo ABC é um triângulo retângulo.
Considere, então,

- o sistema cartesiano xAy, com origem no ponto A e cujos eixos horizontal e vertical são definidos respectivamente pelos vértices "A e C" e "A e B", de modo que os pontos B e C tenham coordenadas $\boxed{B = (0,3)}$ e $\boxed{C = (4,0)}$. Observe que neste sistema $\boxed{A = (0,0)}$.



Suponha que as coordenadas do ponto P no nosso sistema referencial de coordenadas sejam $P = (x, y)$.
Como a distância d entre dois pontos cujas coordenadas com relação a um mesmo plano cartesiano são (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

e as medidas PA, PB e PC são simplesmente as distâncias de "P a A", de "P a B" e de "P a C", respectivamente, temos que:

- $PA = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $PB = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$;
- $PC = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$.

Com isso, podemos escrever algebricamente a expressão a ser majorada da seguinte forma:

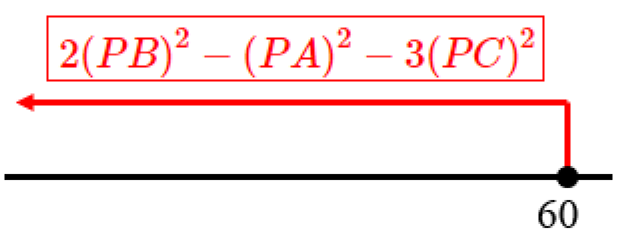
$$\boxed{2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2} =$$
$$= 2\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - 3\left(\sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right)^2$$
$$= 2\left(x^2 + y^2 - 6y + 9\right) - \left(x^2 + y^2\right) - 3\left(x^2 - 8x + 16 + y^2\right)$$
$$= -2x^2 - 2y^2 + 24x - 12y - 30$$
$$= -2\left(x^2 - 12x\right) - 2\left(y^2 + 6y\right) - 30\,.$$

Para facilitar a análise da expressão, vamos fazer dois processos de completamento de quadrado.(Se você não se lembra desse procedimento, dê uma passadinha nesta **Sala de Leitura**). Observe:

$$\boxed{2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2} =$$
$$= -2\left[\left(x^2 - 12x + 36\right) - 36\right] - 2\left[\left(y^2 + 6y + 9\right) - 9\right] - 30$$
$$= -2(x-6)^2 + 72 - 2(y+3)^2 + 18 - 30$$
$$= -2(x-6)^2 - 2(y+3)^2 + 60$$
$$= \boxed{-2\left[(x-6)^2 + (y+3)^2\right] + 60}\,.$$

Finalmente, observe que $(x-6)^2 + (y+3)^2 \geqslant 0$; assim, segue que:

$$-2\left[(x-6)^2 + (y+3)^2\right] \leqslant 0$$
$$-2\left[(x-6)^2 + (y+3)^2\right] + 60 \leqslant 60$$
$$\boxed{2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2} \leqslant 60\,.$$



Dessa forma, o maior valor assumido pela expressão $\boxed{2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2}$ é $\boxed{60}$.

Uma informação complementar:

Veja que a expressão $\boxed{2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2}$ assume o valor 60 somente quando $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 0$ e, neste caso, temos $x = 6$ e $y = -3$.
Dessa forma, o maior valor da expressão $\boxed{2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2}$ ocorre quando o ponto P tem coordenadas $(6, -3)$.
Você pode verificar essa informação utilizando o applet disponibilizado a seguir.

Um applet para ajudar

No applet abaixo, você visualizará o triângulo ABC e um ponto P. Movimentando P, em cada posição o aplicativo fornecerá os comprimentos dos segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$, além dos valores correspondentes da expressão $\boxed{2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2}$. Com isso, você poderá visualizar e comprovar a resposta do problema e a informação complementar dada no final da solução.

Instruções:
(1) Espere o aplicativo carregar completamente.
(2) Clique no ponto **P**, mantenha o mouse pressionado e faça movimentos.
(3) Para retornar à posição inicial, clique no centro das setinhas circulares que aparecem no canto superior direito do aplicativo.

Clique AQUI para abrir o applet.

Para aprender mais...

Clique AQUI para abrir o vídeo "Um ponto de vista".

Vídeo da coleção de recursos educacionais da M³ Matemática Multimídia,
desenvolvida pela Unicamp com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.