.Problema para ajudar na escola: Ali Babão e a décima terceira de suas 40 equações – Um belíssimo Desafio!

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(**Gazeta Matemática**, Romênia) Sejam a e b números inteiros.
Determinar numericamente as raízes da equação

- $(ax-b)^2+(bx-a)^2=x$,

sabendo que essa equação admite uma raiz inteira.

AJUDA

Você se lembra das ***Relações de Girard***?
Caso não, visite **esta Sala** do nosso Blog, pois essas relações ajudarão a resolver este problema.

Se A e B são números reais, então:

$$A^2-B^2=(A-B)\cdot(A+B)\ .$$
$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2\ .$$

Solução

(Adaptada da solução de *Mircea Becheanu*, Chefe da delegação da Romênia da IMO)

Vamos dividir nossa análise em duas situações complementares: a e b são ambos nulos; pelo menos um dos números a e b é não nulo.

- Suponha $a=b=0$.

  Neste caso, a equação $(ax-b)^2+(bx-a)^2=x$ se reduz à equação do primeiro grau $\boxed{x=0}$ que tem uma única solução $\boxed{x_1=0}$.

- Suponha $a\neq 0$ ou $b\neq 0$.

  Observe, inicialmente, a seguinte sequência de igualdades equivalentes

$$(ax-b)^2+(bx-a)^2=x \iff (ax)^2-2abx+b^2+(bx)^2-2abx+a^2=x \iff$$
$$\iff \left(a^2+b^2\right)x^2-4abx+a^2+b^2=x \iff \left(a^2+b^2\right)x^2-(4ab+1)\,x+a^2+b^2=0\,.$$

Como $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, então $a^2+b^2\neq 0$ e, portanto, a equação $(ax-b)^2+(bx-a)^2=x$ se reduz à equação do segundo grau

► $\left(a^2+b^2\right)x^2-(4ab+1)\,x+a^2+b^2=0\,.\qquad (i)$

Pelas informações do problema, a equação em questão tem uma raiz inteira; assim, o discriminante Δ da equação (i) é tal que $\Delta\geqslant 0$.

Com isso, segue que:

$$(4ab+1)^2-4\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\geqslant 0$$
$$(4ab+1)^2-4\cdot\left(a^2+b^2\right)^2\geqslant 0$$
$$(4ab+1)^2-\left(2\cdot\left(a^2+b^2\right)\right)^2\geqslant 0$$

(Veja a AJUDA.)

$$\left[(4ab+1)-\left(2\cdot\left(a^2+b^2\right)\right)\right]\cdot\left[(4ab+1)+\left(2\cdot\left(a^2+b^2\right)\right)\right]\geqslant 0$$
$$\left[1-\left(2\cdot\left(a^2+b^2\right)-4ab\right)\right]\cdot\left[1+\left(2\cdot\left(a^2+b^2\right)+4ab\right)\right]\geqslant 0$$
$$\left[1-2\cdot\left(a^2+b^2-2ab\right)\right]\cdot\left[1+2\cdot\left(a^2+b^2+2ab\right)\right]\geqslant 0$$

(Veja a AJUDA.)

$$\left[1-2\cdot(a-b)^2\right]\cdot\left[1+2\cdot(a+b)^2\right]\geqslant 0.\qquad (ii)$$

Note que o fator $\left[1+2\cdot(a+b)^2\right]>0$; assim, segue de (ii) que $\left[1-2\cdot(a-b)^2\right]\geqslant 0$ e, portanto, $\boxed{1\geqslant 2\cdot(a-b)^2}$.
Mas $(a-b)^2$ é um número natural e, com isso, $2\cdot(a-b)^2$ é um múltiplo natural de 2.

Assim, como 1 não é par, a conclusão $\boxed{1\geqslant 2\cdot(a-b)^2}$ nos assegura que 1 é maior do que um múltiplo de 2. Como o menor natural múltiplo de 2 é o zero, necessariamente $(a-b)^2=0$. Com isso, $a-b=0$ e, então, $a=b$.

Com a informação de que $a=b$, a equação (i) se converte em:

► $\left(2a^2\right)x^2-\left(4a^2+1\right)x+2a^2=0\qquad (iii)$

e, antes de qualquer outra análise mais profunda, observe que:

- 0 e 1 não podem ser solução da equação (iii), pois:
  – se $x=0$ teremos $2a^2=0$ e, consequentemente, $a=0$ o que sabemos não ser possível neste caso que estamos analisando;
  – se $x=1$ teremos
  $$0=\left(2a^2\right)1^2-\left(4a^2+1\right)\cdot 1+2a^2=2a^2-4a^2+1+2a^2=1$$
  e sabemos que $0\neq 1$.

- x não pode ser um número negativo, pois $x<0$ faz com que a expressão $\left(2a^2\right)x^2-\left(4a^2+1\right)x+2a^2$ seja positiva e, consequentemente, diferente de 0.

Dessa forma, se x_1 for a solução inteira garantida pelas hipóteses do problema, então $\boxed{x_1\geqslant 2}$. A partir dessa nova informação, vamos supor que a segunda solução da equação (iii) seja x_2 e utilizar as Relações de Girard.

As **relações de Girard para equações do segundo grau** nos garantem que:

$$x_1+x_2=\frac{4a^2+1}{2a^2}=2+\frac{1}{2a^2}\qquad \text{e}\qquad x_1\cdot x_2=\frac{2a^2}{2a^2}=1\,.$$

Como

$$x_2=\frac{1}{x_1}>0,$$

então

$$x_1<x_1+x_2=2+\frac{1}{2a^2}\,.$$

Porém, a é um número inteiro não nulo; logo, $a^2\geqslant 1$ e assim $\dfrac{1}{a^2}\leqslant 1$.

Dessa forma, segue que

$$x_1<x_1+x_2=2+\frac{1}{2a^2}\leqslant 2+1=3$$

e com isso $2\leqslant x_1<3\,.$

Mas x_1 é um número inteiro; portanto, $x_1=2$. E, como $x_1\cdot x_2=1$, concluímos que $x_2=\dfrac{1}{2}\,.$

Complementando este caso, como $x_1+x_2=2+\dfrac{1}{2a^2}$, observe que:

$$\frac{1}{2a^2}=x_1+x_2-2$$
$$\frac{1}{2a^2}=2+\frac{1}{2}-2$$
$$\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{2}$$
$$a^2=1$$
$$a=\pm 1.$$

Finalmente:

- Se $a=b=0$ a equação tem apenas uma solução: $\boxed{x_1=0}$.
- Se $a=b=\pm 1$ a equação tem duas soluções: $\boxed{x_1=2}$ e $\boxed{x_2=\dfrac{1}{2}}$.

E não existem outras situações.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.