.Problema para ajudar na escola: Ali Babão e a décima quarta de suas 40 equações

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Ali Babão apresentou aos seus discípulos um tipo interessante de equações polinomiais:

- equações cujos coeficientes equidistantes dos extremos ou são todos iguais ou são todos simétricos.

Esquematicamente, são equações da forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

equidistantes
equidistantes
extremos

tais que ou

$$a_n = a_0 \, , \, a_{n-1} = a_1 \, , \, a_{n-2} = a_2, \cdots$$

ou

$$a_n = -a_0 \, , \, a_{n-1} = -a_1 \, , \, a_{n-2} = -a_2, \cdots \; .$$

Ajude os discípulos do mestre Ali, respondendo os itens abaixo.

(a) Se os coeficientes equidistantes dos extremos de uma equação são simétricos, então essa equação admite a raiz 1?
(b) Se os coeficientes equidistantes dos extremos de uma equação forem iguais, essa equação admite a raiz -1?
(c) Resolva a equação $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$.

AJUDA

Destrinchando as caracterizações

Para visualizar melhor as duas caracterizações de equações dadas no problema, escreva ordenadamente os coeficientes da equação a ser analisada em duas linhas:

- em uma linha, escreva do de maior índice para o de menor índice (inclusive os coeficientes iguais a 0);
- na outra linha, escreva do de menor índice para o de maior índice (inclusive os coeficientes iguais a 0).

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{array}$$

►Uma equação ter coeficientes equidistantes dos extremos iguais equivale a dizer que em todas as $n+1$ colunas do respectivo esqueminha os elementos são iguais.
►Uma equação ter coeficientes equidistantes dos extremos simétricos equivale a dizer que em todas as $n+1$ colunas do respectivo esqueminha os elementos são simétricos um do outro.

Uma observação importante é sobre o(s) coeficiente(s) central(ais):

►Se o grau da equação é par, então essa equação tem um número ímpar de coeficientes; logo, existe um único coeficiente central: o coeficiente $a_{\frac{n}{2}}$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{\frac{n}{2}} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{\frac{n}{2}} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{array}$$

►Se o grau da equação é ímpar, então essa equação tem um número par de coeficientes; logo, existem dois coeficientes centrais: os coeficientes $a_{\frac{n-1}{2}}$ e $a_{\frac{n+1}{2}}$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{array}$$

Equações polinomiais desse tipo são o que a Matemática denomina como ***equações recíprocas***.

Solução

(a) Considere uma equação polinomial
$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$
cujos coeficientes equidistantes dos extremos sejam simétricos.
Assim,
$$a_n = -a_0 \, , \, a_{n-1} = -a_1 \, , \, a_{n-2} = -a_2, \cdots .$$
Veja o esqueminha geral:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} a_n = -a_0 & a_{n-1} = -a_1 & a_{n-2} = -a_2 & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} = -a_2 & a_{n-1} = -a_1 & a_n = -a_0 \end{array}$$

Vamos dividir a nossa discussão em função da paridade do grau da equação e utilizar os esqueminhas que destacam o termo central para facilitar o entendimento desta solução.
O que devemos avaliar em cada caso é se a equação $P(x) = 0$ admite ou não a raiz 1, isto é, se $P(1) = 0$ ou $P(1) \neq 0$.

(1) Suponha que o grau da nossa equação seja ímpar.
Neste caso, o esqueminha fica assim:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} a_n = -a_0 & a_{n-1} = -a_1 & \cdots & a_{\frac{n+1}{2}} = -a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} = -a_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & a_{n-1} = -a_1 & a_n = -a_0 \end{array}$$

e

$$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \cdots + a_{\frac{n+1}{2}} \cdot 1^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} \cdot 1^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$$
$$P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$
$$P(1) = -a_0 - a_1 - a_2 + \cdots - a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_1 + a_0$$
$$P(1) = -\cancel{a_0} - \cancel{a_1} - \cancel{a_2} + \cdots - \cancel{a_{\frac{n-1}{2}}} + \cancel{a_{\frac{n-1}{2}}} + \cdots + \cancel{a_2} + \cancel{a_1} + \cancel{a_0}$$
$$P(1) = 0.$$

(2) Suponha que o grau da nossa equação seja par.
Agora, o esqueminha fica assim:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} a_n = -a_0 & a_{n-1} = -a_1 & \cdots & a_{\frac{n}{2}} = -a_{\frac{n}{2}} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{\frac{n}{2}} & \cdots & a_{n-1} = -a_1 & a_n = -a_0 \end{array}$$

Antes de fazermos o cálculo de $P(1)$, observe que para termos elementos simétricos na coluna relativa ao termo central, $a_{\frac{n}{2}} = 0$. pois 0 é o único número cujo simétrico é ele próprio.
Vamos aos cálculos!

$$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \cdots + a_{\frac{n}{2}} \cdot 1^{\frac{n}{2}} + \cdots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$$
$$P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + 0 + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$
$$P(1) = -a_0 - a_1 - a_2 + \cdots + 0 + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$
$$P(1) = -\cancel{a_0} - \cancel{a_1} - \cancel{a_2} + \cdots + 0 + \cdots + \cancel{a_2} + \cancel{a_1} + \cancel{a_0}$$
$$P(1) = 0.$$

Por (1) e (2), concluímos que $P(1) = 0$.
Assim,

1 é, de fato, raiz de qualquer equação polinomial cujos coeficientes equidistantes dos extremos são simétricos.

(b) Considere, agora, uma equação polinomial
$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$
cujos coeficientes equidistantes dos extremos sejam iguais.
Assim,
$$a_n = a_0 \, , \, a_{n-1} = a_1 \, , \, a_{n-2} = a_2, \cdots .$$
Veja o esqueminha geral:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} a_n = a_0 & a_{n-1} = a_1 & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} = a_2 & a_{n-1} = a_1 & a_n = a_0 \end{array}$$

O que vamos avaliar neste item é se a equação $P(x) = 0$ admite ou não a raiz -1, isto é, se $P(-1) = 0$ ou $P(-1) \neq 0$.
Aqui parece que teremos problemas, já que, diferentemente do item anterior no qual tínhamos potências com base 1, as potências com base -1 apresentam dois valores: 1 ou -1.
Vamos dividir, mais uma vez, a nossa discussão em função da paridade do grau da equação e também utilizar os esqueminhas que destacam o termo central.

(1) Aqui, vamos supor inicialmente que o grau da nossa equação seja par.
Então, o nosso esqueminha fica assim:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} a_n = a_0 & a_{n-1} = a_1 & \cdots & a_{\frac{n}{2}} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{\frac{n}{2}} & \cdots & a_{n-1} = a_1 & a_n = a_0 \end{array}$$

Note que:
$$P(-1) = a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (-1)^{n-2} + \cdots + a_{\frac{n}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} + \cdots + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0$$
e como n é par, temos que:
$$P(-1) = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{\frac{n}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$$
$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_{\frac{n}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$$
$$P(-1) = 2a_0 - 2a_1 + 2a_2 + \cdots + a_{\frac{n}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} .$$
Perceba que não temos como garantir se $(-1)^{\frac{n}{2}}$ é 1 ou -1 e muito menos avaliar a soma $2a_0 - 2a_1 + 2a_2 + \cdots + a_{\frac{n}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}$ sem conhecermos os coeficientes da equação.
Por exemplo, a equação polinomial $P(x) = x^2 + 2x + 1 = 0$ tem coeficientes equidistantes dos extremos iguais, tem grau par e $P(-1) = 0$.
Já a equação $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ tem coeficientes equidistantes dos extremos iguais, tem grau par, mas $P(-1) = 1$.
Veja que a equação $P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + x + 1$ tem coeficientes equidistantes dos extremos iguais, tem grau par, mas $P(-1) = a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, o que reforça que este caso que estamos analisando apresenta equações polinomiais $P(x) = 0$ cujo valor $P(-1)$ depende dos seus coeficientes.
Dessa forma,

Não podemos garantir que -1 seja raiz de qualquer equação polinomial de grau par, cujos coeficientes equidistantes dos extremos são iguais.

(2) Vamos supor, agora, que o grau da nossa equação seja ímpar.
Neste caso, o esqueminha fica assim:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} a_n = a_0 & a_{n-1} = a_1 & \cdots & a_{\frac{n+1}{2}} = a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} = a_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & a_{n-1} = a_1 & a_n = a_0 \end{array}$$

e

$$P(-1) = a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (-1)^{n-2} + \cdots + a_{\frac{n+1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}} +$$
$$+ a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 .$$

Como aqui n é ímpar,
$$P(-1) = -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_{\frac{n+1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$$
$$P(-1) = -a_0 + a_1 - a_2 + \cdots + a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$$
$$P(-1) = -\cancel{a_0} + \cancel{a_1} - \cancel{a_2} + \cdots + a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{a_0}$$
$$P(-1) = a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} .$$

Por fim, veja que $\dfrac{n-1}{2} + 1 = \dfrac{n+1}{2}$; assim, os expoentes $\dfrac{n-1}{2}$ e $\dfrac{n+1}{2}$ do -1 são números consecutivos. Logo, uma das potências $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ ou $(-1)^{\frac{n+1}{2}}$ é 1 e a outra é -1 e, com isso,
$$P(-1) = a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0 \; .$$

Portanto, podemos concluir que

-1 é raiz de qualquer equação polinomial de grau ímpar cujos coeficientes equidistantes dos extremos são iguais.

(c) Resolva a equação $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$
Observe que $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$ é uma equação polinomial cujos coeficientes equidistantes dos extremos são simétricos; assim, 1 é uma de suas raízes. Vamos, então, fazer a divisão da expressão $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6$ por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 & x - 1 \\ \cline{2-2} -6x^3 + 6x^2 & 6x^2 - 13x + 6 \\ \hline -13x^2 + 19x - 6 & \\ 13x^2 - 13x & \\ \hline 6x - 6 & \\ -6x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Dessa forma, $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = (x - 1) \cdot \left(6x^2 - 13x + 6\right)$ e, portanto, as outras raízes da equação $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$ são as raízes de $6x^2 - 13x + 6 = 0$.
Para essa segunda equação, basta aplicarmos a fórmula de resolução de uma equação do 2º grau:
$$\frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}$$
e com isso obtemos as raízes $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{3}{2}$.

Portanto, as raízes da equação $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$ são: $\boxed{x_1 = 1}$; $\boxed{x_2 = \dfrac{3}{2}}$ e $\boxed{x_3 = \dfrac{2}{3}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.