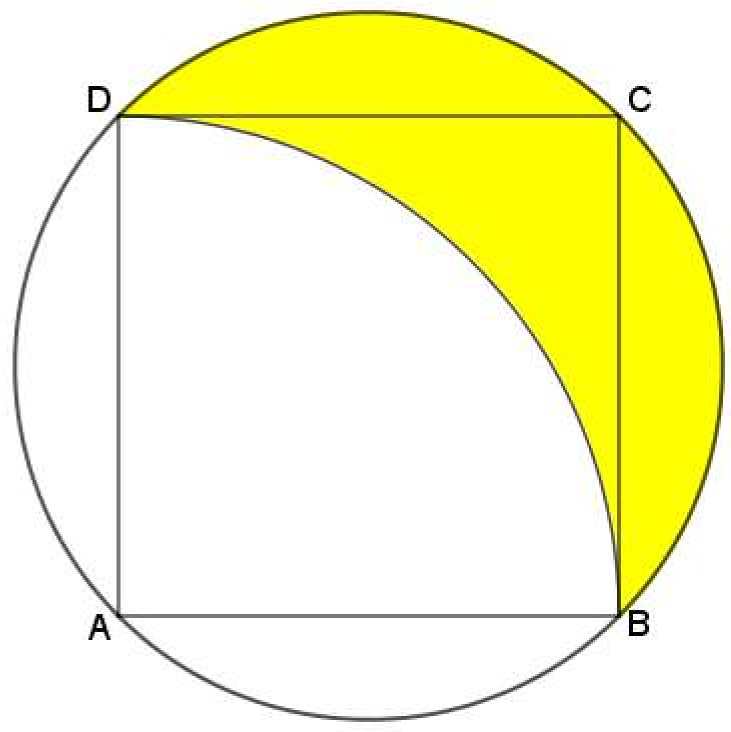
.Problema para ajudar na escola: Uma área amarela

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Os vértices do quadrado $ABCD$ são pontos da circunferência exibida na figura e $\overset{\frown}{BD}$ é um arco da circunferência de centro em A e raio AB.



Sabendo que cada lado do quadrado mede $2\,cm$, determine a área da região colorida de amarelo.

Solução

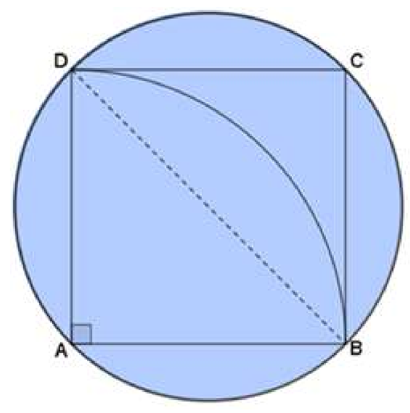
Para solucionar este problema, vamos calcular várias áreas. Observe!

- O triângulo BAD é retângulo; assim, do teorema de Pitágoras, segue que:

$$DB^2 = AD^2 + AB^2$$
$$DB^2 = 2^2 + 2^2$$
$$DB^2 = 8$$
$$DB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

  Como o segmento $\overline{DB}$ é o diâmetro do círculo externo da figura, segue que a área A_{circ} desse círculo é:

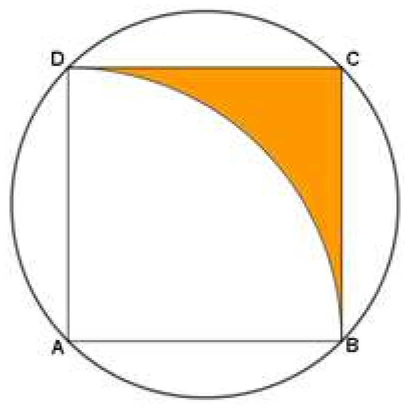
$$A_{circ} = \pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\,\pi\,cm^2.$$



- A área S_1 da região limitada pelos segmentos $\overline{DC}$, $\overline{CB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{BD}$ é igual à área do quadrado $ABCD$ menos um quarto da área do círculo de centro em A e raio AB.

  Assim:

$$S_1 = 2^2 - \frac{\pi\,(2)^2}{4} = 4 - \pi\ cm^2.$$

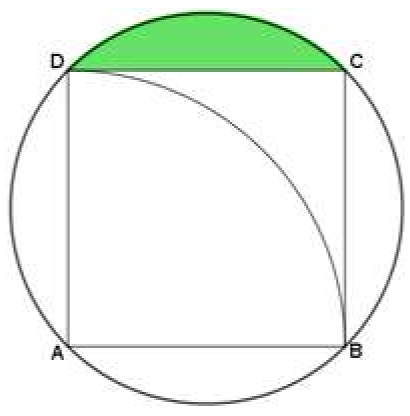


- A área S_2 da região limitada pelo segmento $\overline{DC}$ e pelo arco $\overset{\frown}{DC}$ é a quarta parte da diferença entre a área A_{circ} do círculo externo e a área do quadrado $ABCD$.

  Logo:

$$S_2 = \frac{2\,\pi - 4}{4} = \frac{\pi - 2}{2}\,cm^2.$$

  Observe que S_2 é também a área da região limitada pelo segmento $\overline{CB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{CB}$.



Finalmente, veja que a área S da região colorida de amarelo é a soma da área S_1 com duas vezes a área S_2. Dessa forma:

$$S = S_1 + 2\cdot S_2 = 4 - \pi + 2\cdot\frac{\pi-2}{2} = 4 - \pi + \pi - 2 = 2\,cm^2.$$

Portanto, a área da região colorida de amarelo é $\boxed{2\,cm}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.