.Problema para ajudar na escola: Uma gincana de fim de semana

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

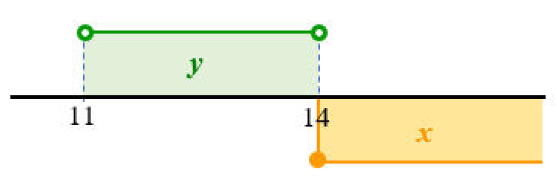
O colégio Reino Feliz vai promover uma grande gincana para seus alunos com mais de onze anos no próximo final de semana e definiu o seguinte critério para a formação das equipes participantes:

- Cada equipe deve ter mais de 20 e menos de 25 alunos.
- Em cada equipe, o número de alunos com menos de catorze anos deve ser menor do que 10 e maior que a metade do número de alunos com catorze anos ou mais.

De quantas maneiras distintas os alunos poderão montar as suas equipes?

Solução

Sejam x e y, respectivamente, o número de alunos com "catorze anos ou mais" e com "menos que catorze anos" que formarão cada equipe.



Dessa forma, as informações matemáticas que podemos extrair do enunciado do problema são as seguintes:

► Cada equipe deve ter mais de 20 e menos de 25 alunos:
$$\begin{cases} x+y>20 \\ x+y<25 \end{cases}.$$
► O número de alunos com menos de catorze anos deve ser menor do que 10:
$y<10.$
► O número de alunos com menos de catorze anos deve ser maior que a metade do número de alunos com catorze anos ou mais:
$y>\dfrac{x}{2}.$

Assim, o sistema de desigualdades que descreve todas as possíveis formações das equipes participantes da gincana é o seguinte:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y > 20-x \\ y < 25-x \\ y<10 \\ y > \dfrac{x}{2} \end{cases},$$

lembrando que estamos interessados em soluções naturais.
Um sistema formado por desigualdades e com muitas soluções pode ser solucionado graficamente. Vejamos, portanto, como fica a solução desse sistema de desigualdades em um plano cartesiano xOy.

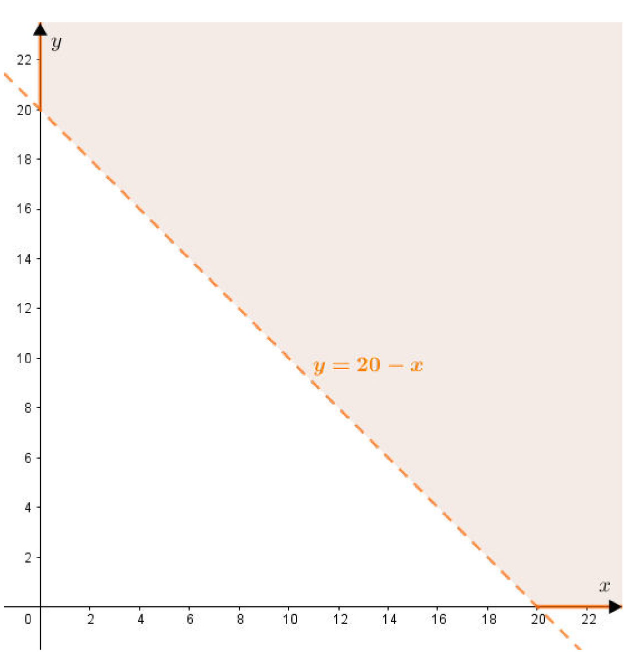
- As soluções desse sistema são os pontos $P=(x,y)$ do plano cartesiano tais que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ e que satisfazem simultaneamente às seguintes condições:

$$\boxed{y>20-x}\,; \qquad \boxed{y<25-x}\,; \qquad \boxed{y<10} \qquad \text{e} \qquad \boxed{y>\dfrac{x}{2}}.$$

Vamos estudar cada uma dessas condições isoladamente em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, para depois analisarmos as quatro simultaneamente e, por fim, escolhermos os pontos com coordenadas naturais.

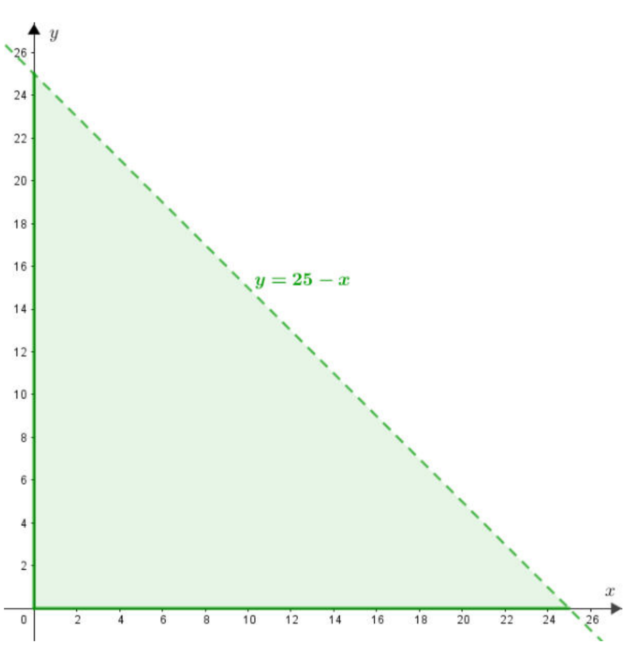
- $y>20-x$

  Os pontos $P=(x,y)$ com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ que satisfazem esta condição são aqueles que estão:
  – acima da reta $y=20-x$;
  – à direita ou sobre o eixo Oy;
  – acima ou sobre o eixo Ox.



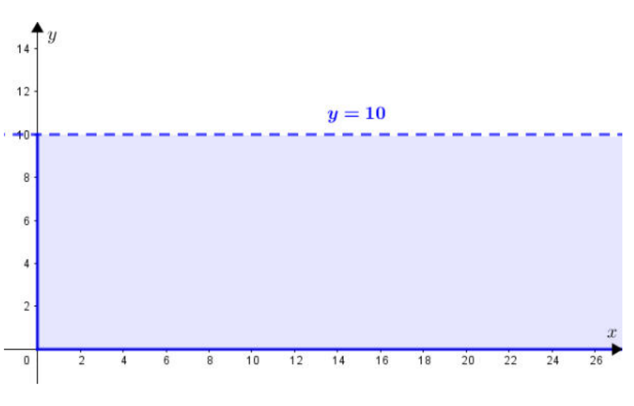
- $y<25-x$

  Os pontos $P=(x,y)$ com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ que satisfazem esta condição são aqueles que estão:
  – abaixo da reta $y=25-x$;
  – à direita ou sobre o eixo Oy;
  – acima ou sobre o eixo Ox.



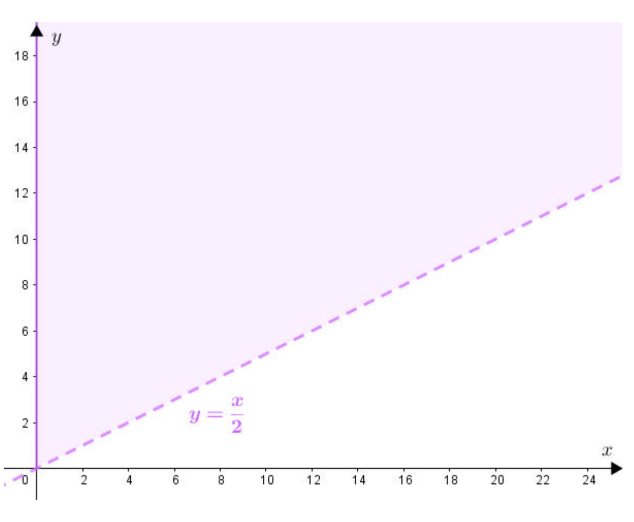
- $y<10$

  Os pontos $P=(x,y)$ com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ que satisfazem esta condição são aqueles que estão:
  – abaixo da reta $y=10$;
  – à direita ou sobre o eixo Oy;
  – acima ou sobre o eixo Ox.

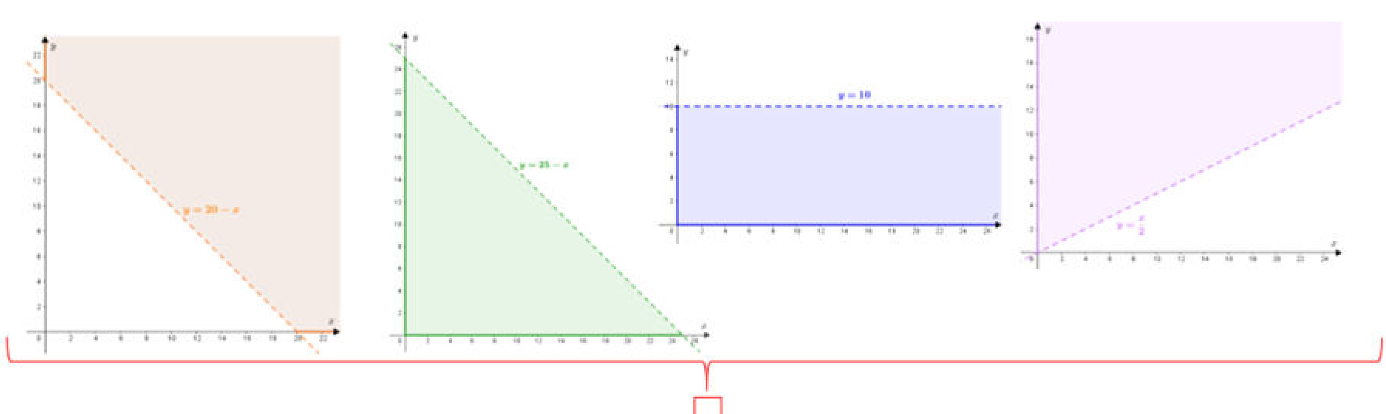


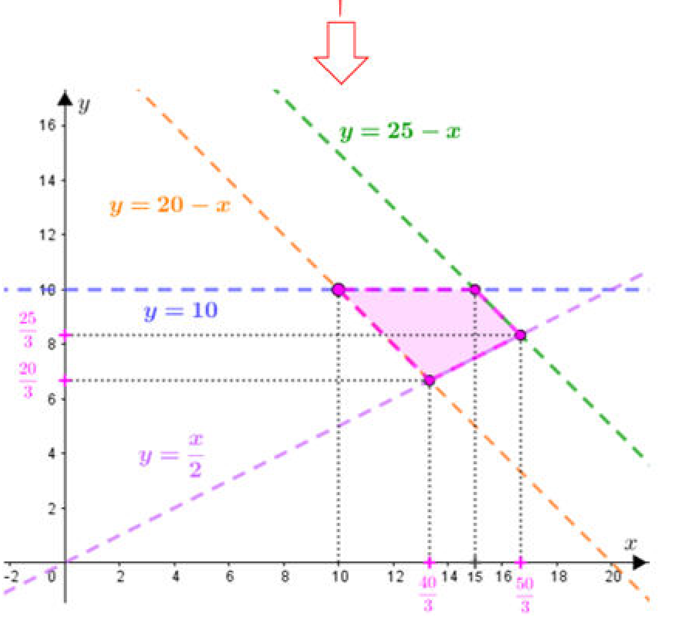
- $y>\dfrac{x}{2}$

  Os pontos $P=(x,y)$ com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ que satisfazem esta condição são aqueles que estão:
  – acima da reta $y=\dfrac{x}{2}$;
  – à direita ou sobre o eixo Oy;
  – acima ou sobre o eixo Ox.



Fazendo a interseção das quatro regiões acima, obtemos a solução em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ do sistema em questão.

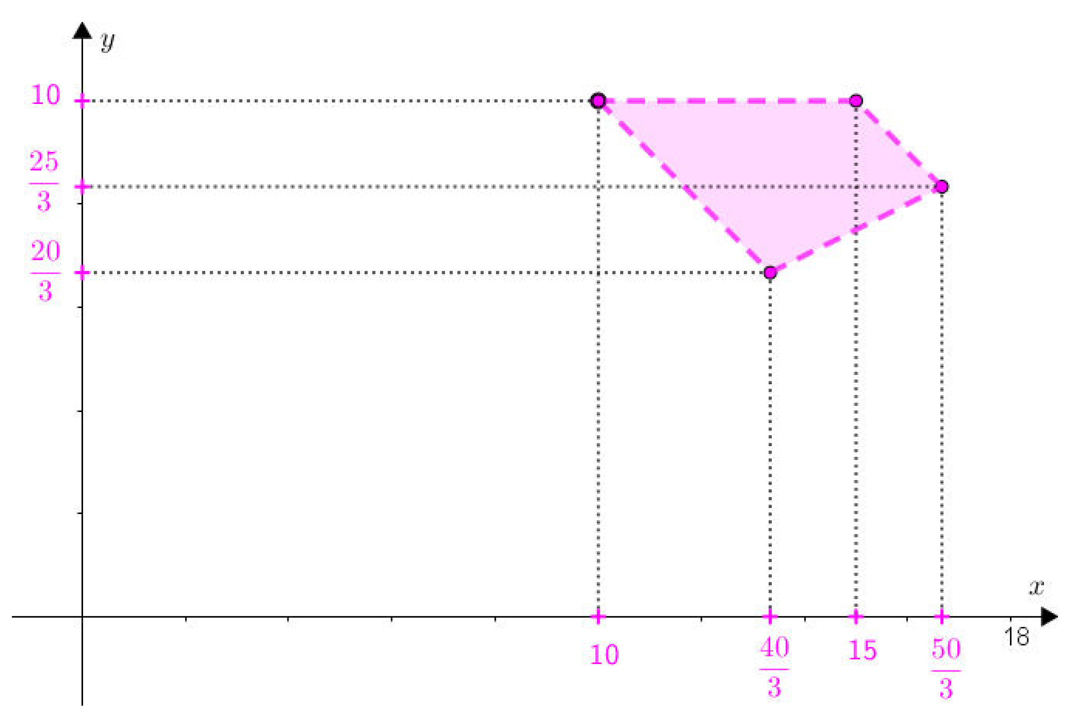




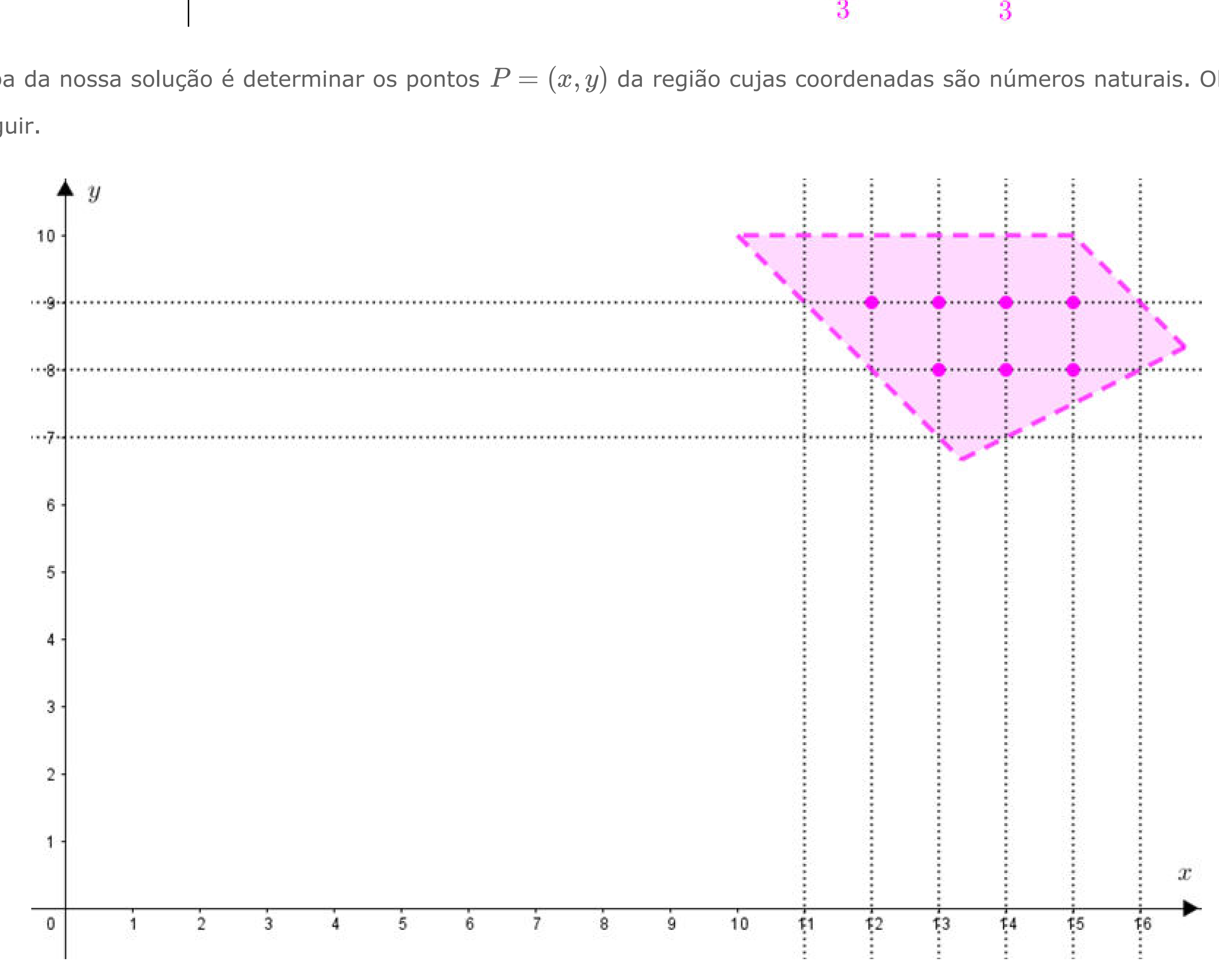
Os quatro pontos que definem a região foram obtidos fazendo a interseção das respectivas retas que os definem:

► retas $y=10$ e $y=20-x$ Substituindo $y=10$ em $y=20-x$, segue que: $y=20-x$ $10=20-x$ $x=10.$ Assim, o ponto de interseção tem coordenadas $(10,10)$.	► retas $y=10$ e $y=25-x$ Substituindo $y=10$ em $y=25-x$, segue que: $y=25-x$ $10=25-x$ $x=15.$ Assim, o ponto de interseção tem coordenadas $(15,10)$.
► retas $y=\dfrac{x}{2}$ e $y=25-x$ Substituindo $y=\dfrac{x}{2}$ em $y=25-x$, segue que: $y=25-x$ $\dfrac{x}{2}=25-x$ $\dfrac{3x}{2}=25$ $x=\dfrac{50}{3}.$ Agora, substituindo $x=\dfrac{50}{3}$ em $y=25-x$, segue que: $y=25-x$ $y=25-\dfrac{50}{3}$ $y=\dfrac{25}{3}$ Assim, o ponto de interseção tem coordenadas $\left(\dfrac{50}{3},\dfrac{25}{3}\right)$.	► retas $y=\dfrac{x}{2}$ e $y=20-x$ Substituindo $y=\dfrac{x}{2}$ em $y=20-x$, segue que: $y=20-x$ $\dfrac{x}{2}=20-x$ $\dfrac{3x}{2}=20$ $x=\dfrac{40}{3}.$ Agora, substituindo $x=\dfrac{40}{3}$ em $y=20-x$, segue que: $y=20-x$ $y=20-\dfrac{40}{3}$ $y=\dfrac{20}{3}$ Assim, o ponto de interseção tem coordenadas $\left(\dfrac{40}{3},\dfrac{20}{3}\right)$.

Assim, a solução geométrica do sistema em questão em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, é a seguinte:



A última etapa da nossa solução é determinar os pontos $P=(x,y)$ da região cujas coordenadas são números naturais. Observe, então, a figura a seguir.



As soluções do sistema com coordenadas naturais são os pontos:

- $(12,9)\,;\,(13,8)\,;\,(13,9)\,;\,(14,8)\,;\,(14,9)\,;\,(15,8)\,;\,(15,9)\,;$

assim, as possíveis maneiras com que os alunos poderão montar as suas equipes são as seguintes:

alunos com "catorze anos ou mais"	12	13	13	14	14	15	15
alunos com "menos que catorze anos"	9	8	9	8	9	8	9

Portanto, **existem** $\boxed{\text{sete}}$ **maneiras distintas de os alunos montarem as suas equipes**.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.