.Problema para ajudar na escola: Uma função afim a fim de embaralhar sua cabeça

Problema

(A partir do 1º ano do E. M.)

(**FGV-SP**, 2007 – Adaptado) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim que satisfaz as seguintes condições:

- $f(1) \leqslant f(2)$,
- $f(3) \geqslant f(4)$,
- $f(5) = 6$.

Determine $f(7)$.

Solução

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, então existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$.
Assim:

- Da hipótese de que $f(1) \leqslant f(2)$, segue que:

$$a \cdot 1 + b \leqslant a \cdot 2 + b$$
$$a + b \leqslant 2a + b$$
$$a \leqslant 2a$$
$$0 \leqslant 2a - a$$
$$0 \leqslant a. \qquad (i)$$

- Da hipótese de que $f(3) \geqslant f(4)$, segue que:

$$a \cdot 3 + b \geqslant a \cdot 4 + b$$
$$3a + b \geqslant 4a + b$$
$$3a \geqslant 4a$$
$$0 \geqslant 4a - 3a$$
$$a \leqslant 0. \qquad (ii)$$

Por (i) e (ii), temos que $\boxed{0 \leqslant a \leqslant 0}$ e, portanto, $\boxed{a = 0}$.
Dessa forma, a lei de formação da função f se reduz a $f(x) = b$.

- Com isso, da hipótese de que $f(5) = 6$, segue que $6 = f(5) = b$, ou seja, $\boxed{b = 6}$.

Pelo exposto, concluímos que $f(x) = 6, \forall x \in \mathbb{R}$, e portanto, em particular, $\boxed{f(7) = 6}$.

Observação importante: Na solução deste problema, utilizamos o fato de uma função afim f ser definida por $\boxed{f(x) = ax + b}$, com a e b **números reais quaisquer**.
No entanto, essa definição não é uma unanimidade. Vários autores definem uma função afim f da seguinte forma:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais, com $a \neq 0$.

Como nos cálculos que fizemos chegamos à conclusão de que $\boxed{a = 0}$, utilizando essa segunda definição concluímos que a função afim f do problema NÃO EXISTE. Consequentemente a imagem $f(7)$ também não existiria!
Neste caso, a resposta do problema seria: $f(7)$ **não existe, pois a função não está definida.**

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.