.Problema para ajudar na escola: Uma desigualdade

Problema

(A partir do 1º ano do E. M.)

Determine todos os valores reais de x tais que $\dfrac{2x+1}{x+2}<5$.

Ajuda

A nossa ajuda para este problema se resume a uma única observação:
Quando lidamos com igualdades, podemos fazer uma mesma operação em ambos os membros sem muita preocupação. Contudo, vale lembrar que:

- **Ao multiplicarmos ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo, é necessário inverter o sinal da desigualdade.**

Solução 1

Em função da observação feita acima, podemos considerar as duas situações possíveis em termos de sinal do denominador $x+2$:

- $x+2>0$
- $x+2<0$

e resolver as duas desigualdades resultantes, não esquecendo de levar em conta em cada solução os valores que fazem com que o denominador seja positivo ou negativo.
A solução final será a união das duas soluções obtidas. Então, vamos lá!

(1) Suponhamos, inicialmente, que $x+2>0$. Assim, nesta discussão estaremos trabalhando com valores de x tais que

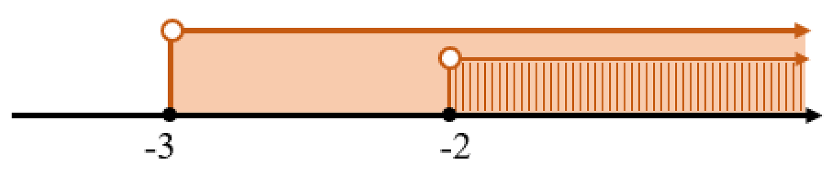
$x>-2. \qquad (i)$

Como estamos considerando $x+2>0$, podemos multiplicar a desigualdade $\dfrac{2x+1}{x+2}<5$ por $x+2$ sem alterar o sinal de desigualdade.
Assim, temos a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned}
&\frac{2x+1}{x+2}<5\\
&2x+1<5\cdot(x+2)\\
&2x+1<5x+10\\
&2x-5x<10-1\\
&-3x<9\\
&3x>-9\\
&x>\frac{-9}{3}\\
&x>-3. \qquad (ii)
\end{aligned}$$

Temos, então, duas restrições para os valores de x que devem ser simultaneamente satisfeitas: condição (i) e condição (ii).

► Observe que a condição (i) é satisfeita pelos elementos do intervalo aberto $]-2\,,+\infty[$ e a condição (ii) é satisfeita pelos elementos do intervalo $]-3\,,+\infty[$; logo, ambas condições são satisfeitas pela interseção desses dois intervalos, ou seja, pelo próprio intervalo $]-2\,,+\infty[$, já que $]-2\,,+\infty[\,\subset\,]-3\,,+\infty[$.



O intervalo $]-2\,,+\infty[$ é, então, a primeira parte da solução.

(2) Suponhamos, agora, que $x+2<0$. Assim, nesta discussão estaremos trabalhando com valores de x tais que

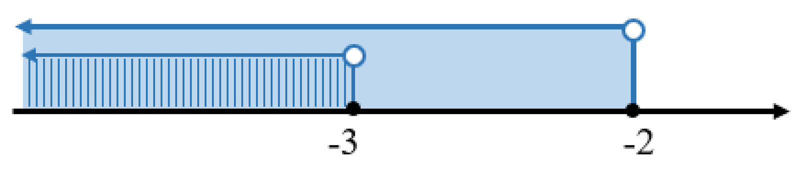
$x<-2. \qquad (iii)$

Como estamos considerando $x+2<0$, ao multiplicarmos a desigualdade $\dfrac{2x+1}{x+2}<5$ por $x+2$ devemos alterar o sinal de desigualdade. Desta vez, temos a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned}
&\frac{2x+1}{x+2}<5\\
&2x+1>5\cdot(x+2)\\
&2x+1>5x+10\\
&2x-5x>10-1\\
&-3x>9\\
&3x<-9\\
&x<\frac{-9}{3}\\
&x<-3. \qquad (iv)
\end{aligned}$$

Temos, agora, duas restrições para os valores de x que devem ser simultaneamente satisfeitas: condição (iii) e condição (iv).

► Note que a condição (iii) é satisfeita pelos elementos do intervalo aberto $]-\infty\,,-2[$ e a condição (iv) é satisfeita pelos elementos do intervalo $]-\infty\,,-3[$; logo, ambas condições são satisfeitas pela interseção desses dois intervalos, ou seja, pelo próprio intervalo $]-\infty\,,-3[$, uma vez que $]-\infty\,,-3[\,\subset\,]-\infty\,,-2[$.

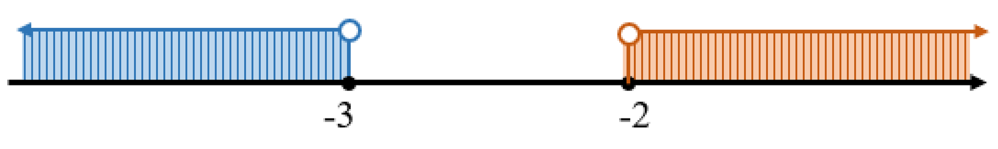


O intervalo $]-\infty\,,-3[$ é a segunda parte da solução.

Finalmente, por (1) e por (2), concluímos que os valores reais de x tais que $\dfrac{2x+1}{x+2}<5$ são de dois tipos:

- os números reais maiores do que -2 e também os números reais menores do que -3,

ou seja, os valores de x que pertencem à união $\boxed{]-\infty\,,-3[\,\cup\,]-2\,,+\infty[}$.



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Poderíamos ter evitado a divisão da análise de sinal do denominador resolvendo a desigualdade proposta sem multiplicá-la por $x+2$.
Vejamos como!
Observe a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

$$\boxed{\frac{2x+1}{x+2}<5} \iff \frac{2x+1}{x+2}-5<0 \iff \frac{2x+1-5\cdot(x+2)}{x+2}<0 \iff$$
$$\iff \frac{2x+1-5x-10}{x+2}<0 \iff \boxed{\frac{-3x-9}{x+2}<0}.$$

Como $\dfrac{2x+1}{x+2}<5 \iff \dfrac{-3x-9}{x+2}<0$, podemos resolver a desigualdade $\dfrac{-3x-9}{x+2}<0$ para resolver o problema. E para resolver essa desigualdade, faremos isoladamente a análise de sinal das expressões $-3x-9$ e $x+2$ e, a partir dessas análises, analisaremos o sinal da expressão $\dfrac{-3x-9}{x+2}$ em função da variação de x.
Vejamos.

(1) **Análises isoladas de sinal**

Analisar o sinal de uma expressão significa saber para que valores de x a expressão define um número positivo, um número negativo ou o número 0. E não precisa adivinhar, é só fazer continhas…

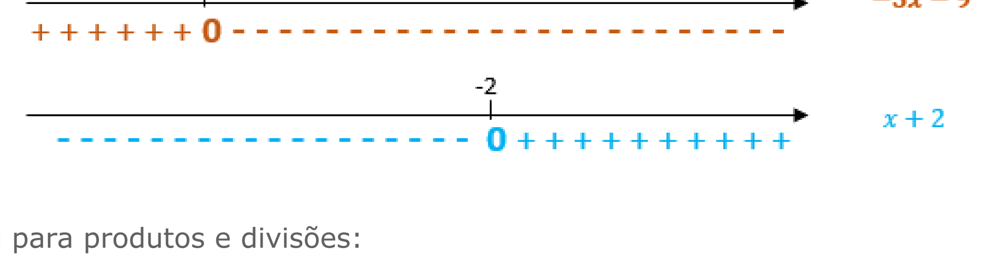
$$\begin{array}{l|l}
x+2>0 \iff x>-2 & -3x-9<0 \iff -3x<9 \iff x>-3\\
x+2<0 \iff x<-2 & -3x-9>0 \iff -3x>9 \iff x<-3\\
x+2=0 \iff x=-2 & -3x-9=0 \iff -3x=9 \iff x=-3
\end{array}$$

(2) Análise de sinal da expressão $\dfrac{-3x-9}{x+2}$.

Vamos representar as análises de sinal do item anterior, considerando a reta real. Para isso, observamos que:

- a análise do sinal de $-3x-9$ nos diz que à direita de -3 a expressão é negativa; à esquerda de -3 a expressão é positiva e para $x=-3$ a expressão é zero.
- a análise do sinal de $x+2$ nos diz que à direita de -2 a expressão é positiva ; à esquerda de -2 a expressão é negativa e para $x=-2$ a expressão é zero.

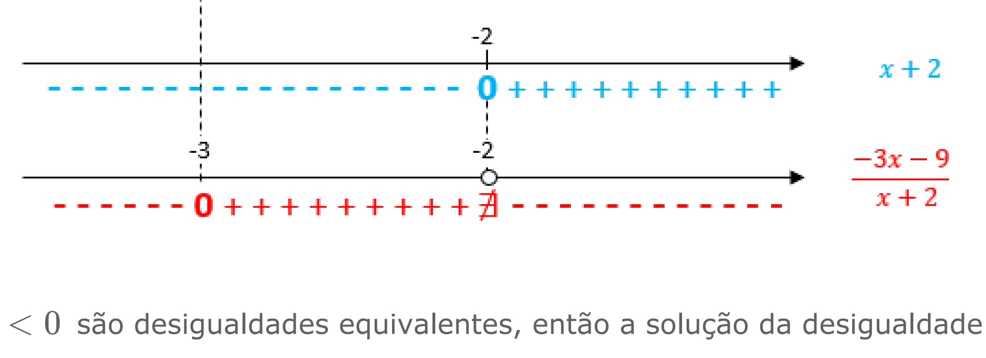
Esquematicamente:



Lembrando das regrinhas de sinal para produtos e divisões:

- **produto/quociente de números com sinais contrários é um número negativo;**
- **produto/quociente de números com mesmo sinal é um número positivo.**

podemos, finalmente, obter a variação de sinal da expressão $\dfrac{-3x-9}{x+2}$.



Como $\dfrac{2x+1}{x+2}<5$ e $\dfrac{-3x-9}{x+2}<0$ são desigualdades equivalentes, então a solução da desigualdade $\dfrac{2x+1}{x+2}<5$ são os valores de x para os quais a expressão $\dfrac{-3x-9}{x+2}$ é negativa.
Assim, olhando a variação de sinal da expressão $\dfrac{-3x-9}{x+2}$, vemos que devemos ter $\boxed{x<-3 \text{ ou } x>-2}$ para que a desigualdade $\boxed{\dfrac{2x+1}{x+2}<5}$ seja satisfeita. Esses valores correspondem à união $\boxed{]-\infty\,,-3[\,\cup\,]-2\,,+\infty[}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.