.Problema para ajudar na escola: Um módulo para atrapalhar

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Determinar todos os valores reais de x que satisfazem a seguinte condição: $|4x-1|<|2-x|$.

Lembretes

(1) Se a e b são números reais não negativos, então as afirmações $\boxed{a<b}$ e $\boxed{a^2<b^2}$ são equivalentes:
Em símbolos: $a<b \iff a^2<b^2$.
(2) Se a é um número real, então $a^2=|a|^2$.

Solução

Como por definição de valor absoluto de um número real sabemos que $|4x-1|\geqslant 0$ e $|2-x|\geqslant 0$, o **Lembrete (1)** nos garante que:

$$|4x-1|<|2-x| \iff |4x-1|^2<|2-x|^2. \qquad (i)$$

Por outro lado, sendo x um número real, temos que $4x-1$ e $2-x$ são números reais. Logo, pelo **Lembrete (2)**, temos que:

$$|4x-1|^2=(4x-1)^2 \qquad \text{e} \qquad |2-x|^2=(2-x)^2. \qquad (ii)$$

Assim, por (i) e (ii) segue que

$$|4x-1|<|2-x| \iff |4x-1|^2<|2-x|^2 \iff (4x-1)^2<(2-x)^2,$$

e, portanto, podemos resolver a desigualdade $|4x-1|<|2-x|$, resolvendo a desigualdade $(4x-1)^2<(2-x)^2$.
Vamos lá!
De $(4x-1)^2<(2-x)^2$ segue que:

$$16x^2-8x+1<4-4x+x^2$$
$$15x^2-4x-3<0,$$

assim, estamos procurando números reais x que tornem a expressão $15x^2-4x-3$ negativa. Vamos, então, fazer a análise da variação de sinal dessa expressão.
Uma maneira rápida de estudarmos o sinal dessa expressão é observarmos o gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=15x^2-4x-3$. Em um plano cartesiano xOy esse gráfico é uma parábola com diretriz paralela ao eixo OX e concavidade voltada para cima. Para traçar o gráfico de f e analisar a variação de sinal, vamos precisar das raízes da equação de segundo grau $15x^2-4x-3=0$; são elas:

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 15\cdot(-3)}}{2\cdot 15}$$

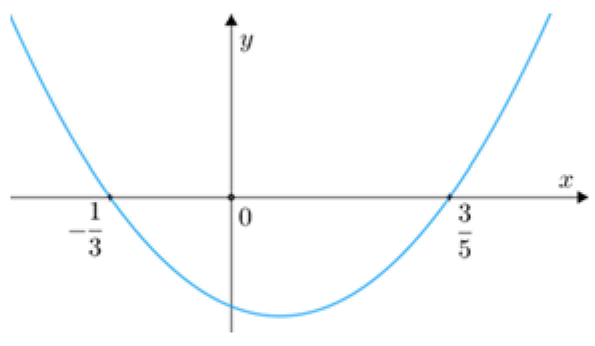
$$x=\frac{4\pm\sqrt{196}}{30}$$

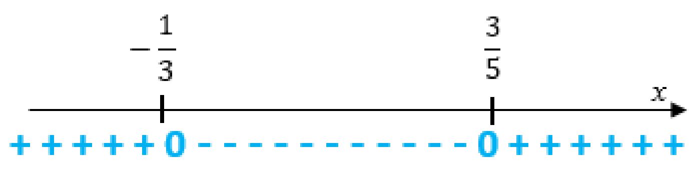
$$x=\frac{4\pm 14}{30}$$

$$x_1=\frac{4+14}{30}=\frac{18}{30} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{4-14}{30}=\frac{-10}{30}$$

$$\boxed{x_1=\frac{3}{5}} \quad \text{e} \quad \boxed{x_2=-\frac{1}{3}}.$$

Mesmo sem as coordenadas do vértice da parábola, somente sabendo que essa parábola tem concavidade voltada para cima, já temos condições de analisar a variação de sinal da expressão $15x^2-4x-3=0$; observe:





Observando os valores de x para os quais a função f é negativa, concluímos que a desigualdade $|4x-1|<|2-x|$ é satisfeita para valores reais de x entre $-\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{5}$, ou seja, $\boxed{x\in\left]-\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right[}$.

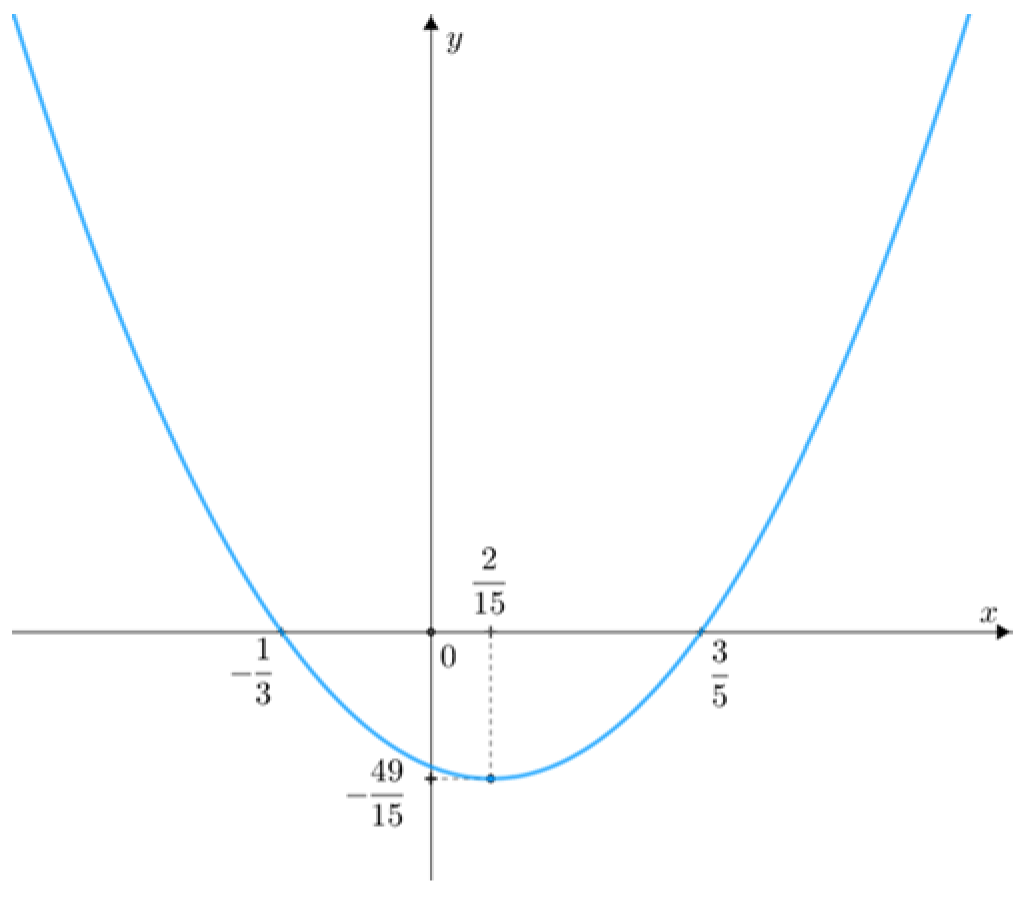
Embora não necessário, vamos calcular as coordenadas do vértice da parábola para obter um esboço melhor do gráfico da função f.
Sabemos que, se (x_v,y_v) são essas coordenadas, então:

- x_v é a média aritmética de x_1 e x_2 e
- $y_v=f(x_v)$, ou ainda, $y_v=\dfrac{-\left(4^2-4\cdot 15\cdot(-3)\right)}{2\cdot 15}=-\dfrac{196}{60}=\dfrac{49}{15}$.

Assim, no nosso caso:

- $x_v=\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{\frac{4}{15}}{2}=\dfrac{2}{15} \quad , \quad y_v=f\left(\dfrac{2}{15}\right)=-\dfrac{49}{15}$

e, portanto, o vértice da parábola é o ponto $V=\left(\frac{2}{15},-\frac{49}{15}\right)$.
Com isso, conseguimos um esboço melhorzinho do gráfico da função f.



(...E o módulo nem atrapalhou muito, não é?)

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.