



.Problema para ajudar na escola: Mais um estranho número racional...



Problema

(A partir do 8º ano do E. F.)

Sabemos que o número $a = 5,37241241241 \dots 241 \dots$ é denominado uma **dízima periódica composta** e pode ser escrito como $a = 5,37\overline{241}$.

Embora pareça um pouco estranho,

► **a é um número racional.**

Verifique a veracidade dessa afirmação, determinando números naturais n e m , primos entre si, tais que $a = \frac{m}{n}$.

(Só para lembrar, a fração $\frac{m}{n}$ que você determinou é conhecida como uma geratriz da dízima $5,37\overline{241}$.)

Solução

(Talvez você esteja pensando com seus botões: – **Como é mesmo a fórmula da geratriz de uma dízima?**

Bem, esse é um dos problemas de a gente se limitar apenas a decorar fórmulas matemáticas: mais cedo ou mais tarde a gente se esquece delas...)

O desconforto de trabalharmos com números com infinitos dígitos é que não conseguimos sequer escrevê-los e, portanto, não trabalhamos especificamente com eles e sim com aproximações deles! Mas nas dízimas, os infinitos dígitos se repetem periodicamente e isso possibilita que a gente se desfaça deles rapidamente e consiga trabalhar com os próprios números, e não com aproximações. Como? Transformando as chamadas dízimas em frações.

- **Para isso, basta produzir, a partir da dízima em questão, duas dízimas com o mesmo período de tal forma que em ambas esse período venha imediatamente após a vírgula e, em seguida, fazer a diferença entre elas.**

No nosso caso, observe que podemos produzir essas duas dízimas com mesmo período deslocando a vírgula, por exemplo, duas e cinco casas decimais à direita. Para isso, vamos multiplicar a por 10^2 e 10^5 :

$$10^2 \times a = 10^2 \times 5,37241241241 \dots 241 \dots = 537,241241241 \dots 241 \dots$$

$$10^5 \times a = 10^5 \times 5,37241241241 \dots 241 \dots = 537241,241241 \dots 241 \dots$$

Agora, vamos fazer a diferença positiva entre as duas dízimas obtidas:

$$10^5 \times a - 10^2 \times a = 537241, \boxed{241241 \dots 241 \dots} - 537, \boxed{241241241 \dots 241 \dots}$$

$$(10^5 - 10^2) \times a = (537241 + 0,241241 \dots 241 \dots) - (537 + 0,241241 \dots 241 \dots)$$

$$(10^5 - 10^2) \times a = \left(537241 + \cancel{0,241241 \dots 241 \dots} \right) - \left(537 + \cancel{0,241241 \dots 241 \dots} \right)$$

$$99900 \times a = 537241 - 537$$

$$\boxed{a = \frac{536704}{99900}}$$

Observe que, de fato a é um número racional, já que a é uma razão entre números inteiros, com o segundo não nulo.

Vamos, agora, simplificar a fração obtida, para escrevermos a com o numerador e o denominador primos entre si:

$$a = \frac{\cancel{536704}^2}{\cancel{99900}^2} = \frac{\cancel{268352}^2}{\cancel{49950}^2} = \boxed{\frac{134176}{24975}}$$

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.