.Problema para ajudar na escola: Lados em progressão

Problema

(A partir do 1º ano do E. M.)

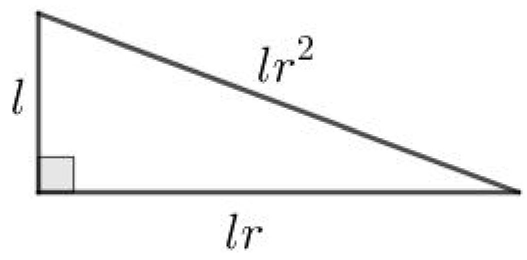
(**OME** – Olimpiada Matemática Española, 2001) Os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica.
Determinar a razão r dessa progressão.

Lembrete

Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Solução

- Observe, inicialmente, que a razão r de uma progressão pode ser 1, maior do que 1 ou menor do que 1. Na nossa solução vamos supor $r>1$, pois:
  - se considerássemos $r=1$, as três medidas seriam iguais e isso não seria possível, visto que o Teorema de Pitágoras nos assegura que, em um triângulo retângulo, a hipotenusa é maior do que os dois catetos.
  - se considerássemos $0<r<1$, obteríamos as mesmas medidas dos lados, só que em ordem inversa.
- Observe também que o lado com a menor medida é um dos dois catetos do triângulo; pois, em um triângulo retângulo, a hipotenusa é maior do que os dois catetos.



Seja l unidades de comprimento a medida do menor lado do triângulo retângulo em questão. Logo, as medidas dos outros lados serão $l\,r$ e $l\,r^2$ unidades de comprimento.
Pelo Teorema de Pitágoras, segue que:

$$l^2+(lr)^2=\left(lr^2\right)^2$$
$$\cancel{l^2}+\cancel{l^2}\,r^2=\cancel{l^2}\,r^4$$
$$1+r^2=r^4$$
$$r^4-r^2-1=0\,. \qquad (i)$$

Precisamos, então, resolver a equação biquadrada (i) e para isso vamos fazer uma mudança de variável: $x=r^2$.
Observe:

$$r^4-r^2-1=0$$
$$x^2-x-1=0$$
$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Agora, precisamos obter o valor de r e para tanto vamos utilizar a igualdade $x=r^2$. Mas perceba que $r^2>1$ e $x_2<0$; assim descartaremos essa solução. Dessa forma ficamos, apenas, com $x_1=r^2$, donde segue que:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=r^2$$
$$\sqrt{r^2}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$|\,r\,|=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$r=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\,.$$

Para finalizar, observe que $r>0$, assim descartamos o valor $r=-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ e, portanto, a razão da progressão que satisfaz o problema é $\boxed{r=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}$.

Observação: Particularmente, observe que $r=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\approx 1,27$; logo, $r>1$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.