Aula 16 – Homotetia I

Objetivo

Efetuar a homotetia dos principais elementos de construção geométrica.

No estudo de **homotetia** precisamos de uma noção de orientação de um segmento. Um segmento AB pode ser orientado em dois sentidos: de A para B ou de B para A, que denotaremos respectivamente por $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$.

Se numa mesma reta forem dados dois segmentos AB e CD de comprimentos a e c, respectivamente, então a razão entre os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ será:

- $+\dfrac{a}{c}$ se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tiverem o mesmo sentido sobre a reta;
- $-\dfrac{a}{c}$ se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tiverem o sentidos opostos sobre a reta.

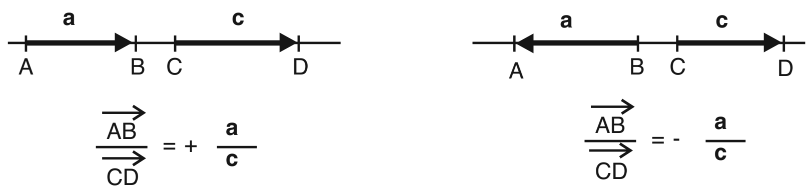

Figura 73

Multiplicação de um ponto

Definição: *Sejam dados dois pontos A e O sobre uma reta r e um número real $\alpha \neq 0$. O ponto $B \in r$ é a* ***multiplicação*** *de A por α, com* ***centro*** *em O, se e somente se, $\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \alpha$, ou ainda ,$\overrightarrow{OB} = \alpha.\overrightarrow{OA}$.*

Exemplos: Multiplicar o ponto A por α com centro em O nos seguintes casos:

a)$\alpha = \dfrac{2}{3}$

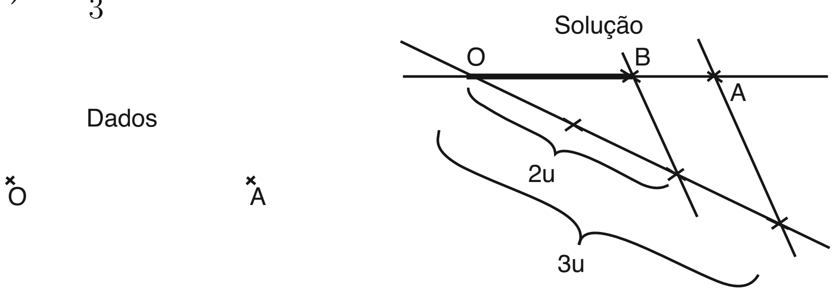

Figura 74

b) $\alpha = -\dfrac{3}{2}$

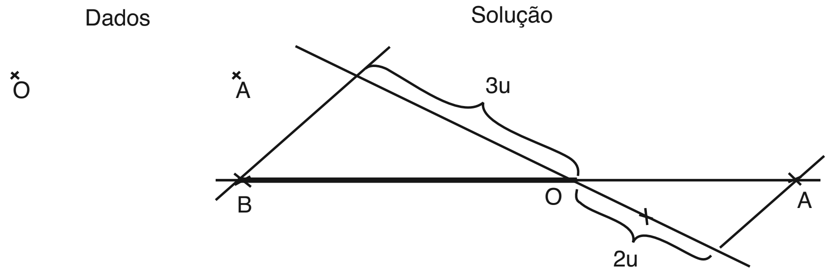

Figura 75

Note que os exemplos anteriores são solucionados utilizando somente o Teorema de Tales. No caso de multiplicação por um número inteiro a solução pode ser obtida sem a utilização do Teorema de Tales, pois basta repetir o segmento quantas vezes representar o inteiro no mesmo sentido (inteiro positivo) ou no sentido oposto (inteiro negativo).

c) $\alpha = -2$ e $\alpha = 3$

Figura 76

As maiores dificuldades encontradas na multiplicão de um ponto A com centro em O acontecem quando consideramos os valores reais irracionais. Em alguns casos a multiplicação se torna impossível, por exemplo $\alpha = \pi$, visto que é impossível obte-lo de maneira exata utilizando régua e compasso. Outros possíveis, como por exemplo $\alpha = \sqrt{2}$, necessita de construções auxiliares. Vejamos o seguinte exemplo:

d) $\alpha = \sqrt{2}$

Sendo dados o centro O e ponto A, indicando por a a medida do segmento OA, devemos obter inicialmente um segmento de medida $a\sqrt{2}$. Este segmento pode ser obtido pela hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles com catetos de medida a. Dessa forma, basta tomar o ponto B no prolongamento do segmento orientado $\overrightarrow{OA}$ de medida $a\sqrt{2}$.

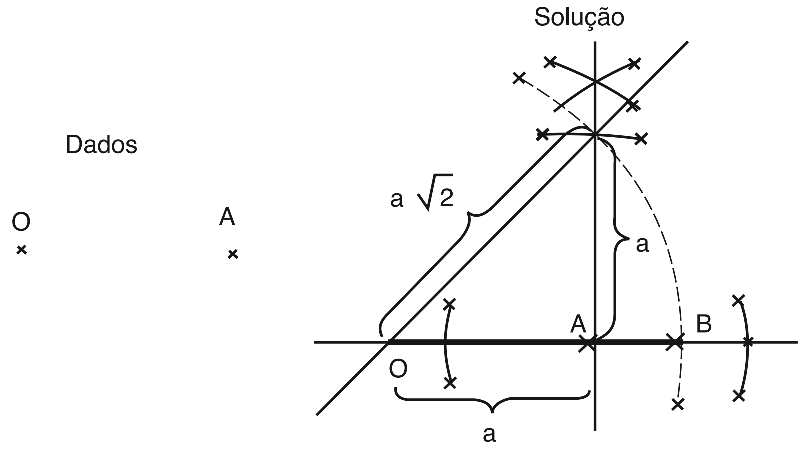

Figura 77

Exercícios

1. Multiplique o ponto A por α nos seguintes casos:

(a) $\alpha = \dfrac{4}{3}$

Figura 78

(b) $\alpha = -\dfrac{3}{4}$

Figura 79

(c) $\alpha = -2\sqrt{3}$

Figura 80

Vamos explicar como se obtém o centro de homotetia considerando $\dfrac{m}{n} > 1$.

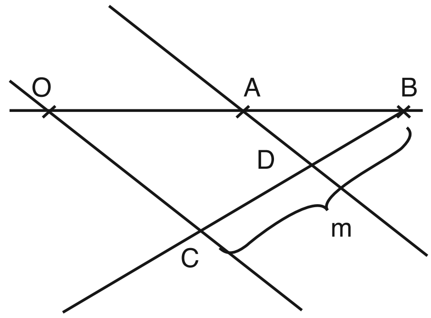

Figura 81

Tomando em uma reta qualquer que passe por B um ponto C tal que $\overline{BC} = m$, unindo o centro O e o ponto C e se traçarmos por A uma reta paralela a OC, esta reta interceptará o segmento CB no ponto D tal que $\overline{CD} = n$, pois

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{\overline{CD}}.$$

Podemos obter o centro de homotetia da seguinte forma:

- Construa a semi-reta de origem em B que passa por A.
- Pelo ponto B trace outra semi-reta. E nessa semi-reta marque o ponto C tal que $BC = m$.
- Marque o ponto D no segmento CB tal que $CD = n$.
- Una os pontos D e A por uma reta r.
- Pelo ponto C trace uma reta paralela à r interceptando a semi-reta de origem em B que passa por A no ponto O que é o centro de homotetia.

Siga o mesmo raciocínio para os outros casos de razão de homotetia.

2. Dados os pontos A e B distintos, obtenha o ponto O na reta determinada por esses pontos de tal forma que B seja obtido pela multiplicação de A por α com centro em O.

   (a) $\alpha = 2$

Figura 82

   (b) $\alpha = -\dfrac{1}{4}$

Figura 83

   (c) $\alpha = -\sqrt{5}$

Figura 84

As aplicações de homotetia em construções geométricas são baseadas na seguinte propriedade:

Propriedade 1: *Se multiplicarmos dois pontos distintos A e B por um mesmo número real $\alpha \neq 0$ com o mesmo centro O obtemos dois pontos A' e B' tais que $A'B'//AB$ e* $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |\alpha|$.

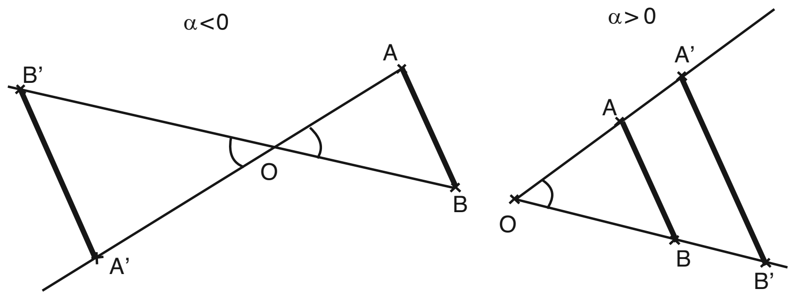

Figura 85

Note pela Figura 85 que independente do sinal de α temos $A'\widehat{O}B' = A\widehat{O}B$ e $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = |\alpha|$, e assim, os triângulos AOB e $A'OB'$ são semelhantes, e conseqüentemente $A'B'//AB$ e $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |\alpha|$.

Figuras Homotéticas

Definição: Sejam dados uma figura F e um ponto O. Consideremos a figura F' que reune todos os pontos que são resultados da multiplicação dos pontos de F por um mesmo valor real $\alpha \neq 0$ relativos ao centro O.

1. As figuras F e F' são chamadas de figuras **Figuras Homotéticas**;
2. o ponto O é chamado de **Centro de Homotetia**;
3. o valor α é chamado de **Razão de Homotetia**;
4. a reta que contém o ponto e o centro de homotetia é chamado de **Reta de Homotetia**;
5. se $\alpha > 0$, então dizemos que a homotetia é **Direta**;
6. se $\alpha < 0$, então dizemos que a homotetia é **Inversa**;
7. se um ponto $A \in F$ se transforma pela homotetia em um ponto $A' \in F'$, então os pontos A e A' são chamados de **Pontos Homólogos**.

Homotetia direta ($\alpha > 0$)

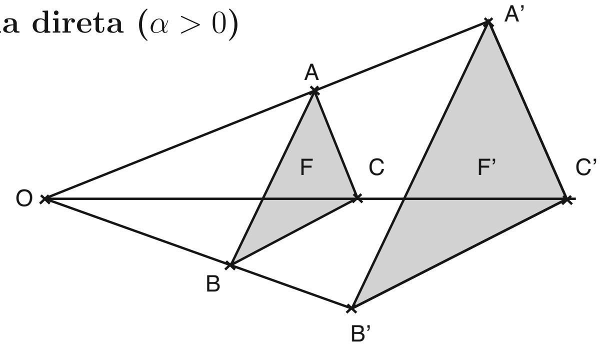

Figura 86

Homotetia inversa ($\alpha < 0$)

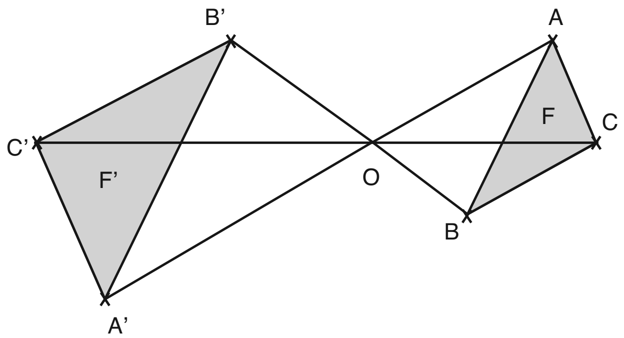

Figura 87

(1) "Linear" = "segue em uma linha reta". Os elementos lineares são os elementos retilíneos obtidos por pontos da figura dada. No caso de um polígono, por exemplo, os lados, a diagonais e as retas suportes dos lados ou das diagonais são elementos retilíneos do polígono.

Uma conseqüência imediata da Propriedade 1 de homotetia é a seguinte propriedade que se refere a elementos lineares(1) de figuras homotéticas.

Propriedade 2 *Duas figuras homotéticas são semelhantes e apresentam seus elementos lineares paralelos.*

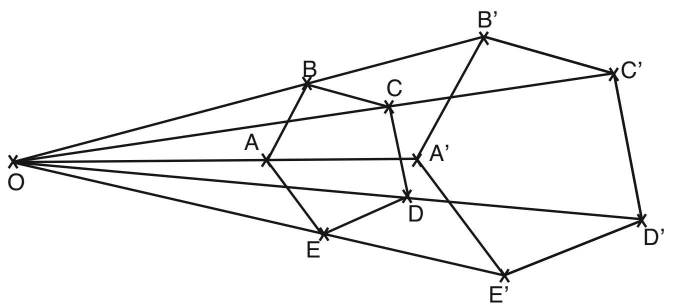

Figura 88 : $ABCDE \simeq A'B'C'D'E'$ e $AB//A'B'$, $BC//B'C'$...

O início dos estudos de figuras semelhantes é atribuido a Tales de Mileto($\pm$600 a.C.). O estudo das figuras semelhantes semelhantemente colocadas foi feita, pela primeira vez, por Poncelet, em 1822. A denominação figuras homotéticas foi dada por Chasles, em 1827.

Alguns autores no passado costumavam denominar as figuras homotéticas como ***figuras semelhantes semelhantemente colocadas***.

Multiplicação da reta

Pela propriedade 2 a multiplicação de uma reta é um outra reta paralela, pois a reta é uma figura linear. Neste caso, para se obter a multiplicação de uma reta basta então multiplicarmos um único ponto desta reta.

Problema 1: Multiplicar a reta r por $\alpha = \dfrac{3}{2}$ com centro de homotetia $O \notin r$.

Para efetuarmos a multiplicação podemos seguir os seguintes passos:

1.1 Escolha um ponto $A \in r$. Una o ponto A ao centro de homotetia O. Denomine a reta obtida por s;

1.2 Trace uma reta t pelo ponto O distinta de s e construa seguidamente, após o ponto O sobre a reta t, três segmentos de igual comprimento. Denomine os pontos obtidos em t por O_1, O_2 e O_3;

1.3 Trace a reta u pelos pontos O_2 e A e trace a reta v pelo ponto O_3 paralela à reta u;

1.4 As retas v e s se interceptam no ponto A' que é a multiplicação de A por $\dfrac{3}{2}$ com centro em$O$;

1.5 Pelo ponto A' trace a reta r' paralela à r.

A reta r' é a multiplicação de r por $\dfrac{3}{2}$ com centro em O.

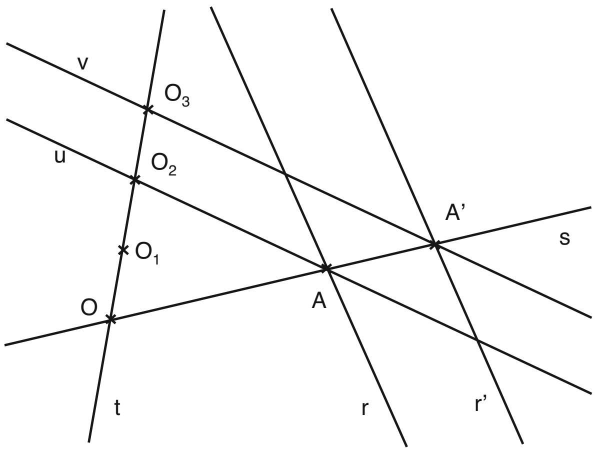

Figura 89

Justificativa: Observe que $\dfrac{\overline{OO_3}}{\overline{OO_2}} = \dfrac{3}{2}$ por construção. Como O_2A e O_3A' são paralelos e o ângulo em O é comum aos triângulos O_2OA e O_3OA', então tais triângulos são semelhantes. Neste caso, $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{3}{2}$, isto é, A' é a multiplicação de A por $\dfrac{3}{2}$ com centro em O. Pela propriedade 2, r' que passa por A' paralela à r, é a multiplicação da reta r por $\dfrac{3}{2}$ com centro em O.

Observações:

- No problema anterior a multiplicação da reta r por $\dfrac{3}{2}$ resultou em afastamento da reta em relação ao centro de homotetia, isto acontece porque a razão de homotetia é maior que 1. Se a razão é positiva e menor que 1 o resultado da multiplicação se aproxima do centro.
- Se a razão é negativa o centro de homotetia aparece entre a reta dada e o resultado da multiplicação.

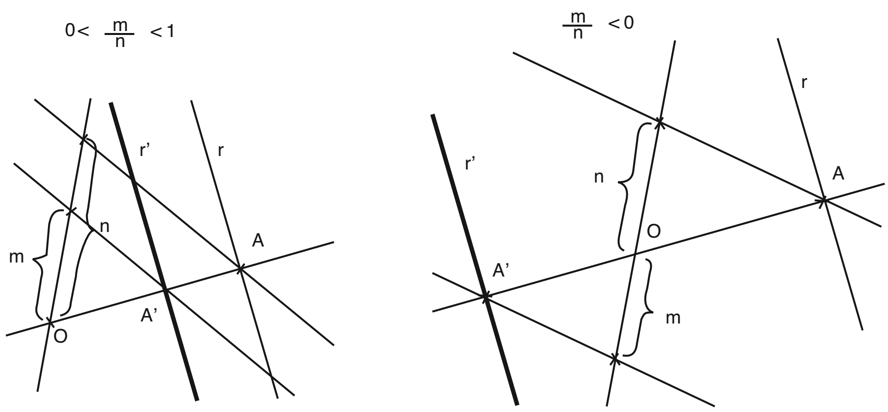

Figura 90

- Obtida a multiplicação de uma reta podemos obter imediatamente a multiplicação de um ponto qualquer da reta, basta conduzi-lo por sua reta de homotetia ao resultado da multiplicação da reta dada.

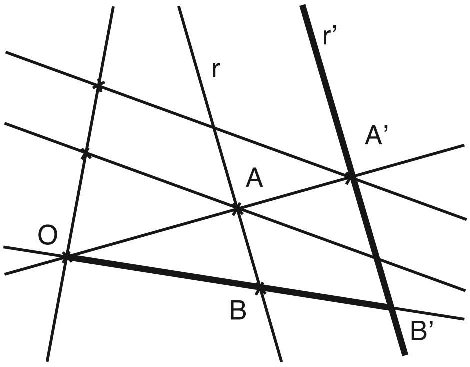

Figura 91

Exercícios

3. Para os itens a seguir multiplique a reta r pela razão α com centro de homotetia O.

   (a) $\alpha = \dfrac{5}{4}$

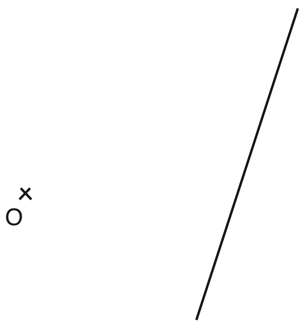

Figura 92

   (b) $\alpha = \dfrac{3}{5}$

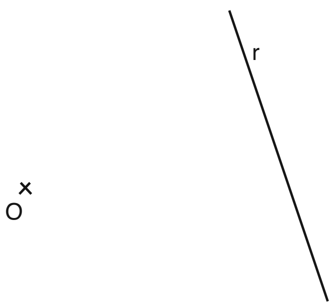

Figura 93

(c) $\alpha = -\dfrac{5}{3}$

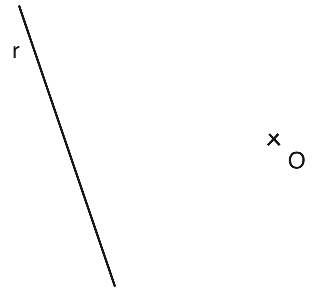

Figura 94

(d) $\alpha = 2$

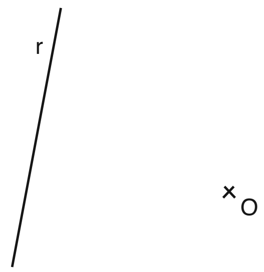

Figura 95

(e) $\alpha = -\dfrac{m}{n}$

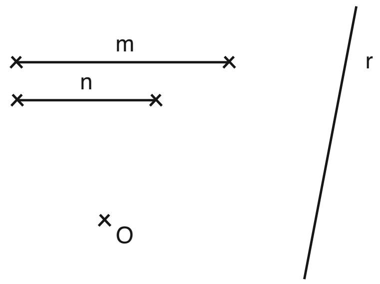

Figura 96

4. Encontre o lugar geométrico dos centros de homotetia para os quais a reta r' é o resultado da multiplicação de r por α nos seguintes itens:

(a) $\alpha = \dfrac{5}{4}$

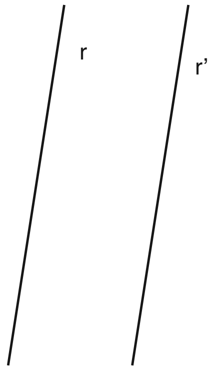

Figura 97

(b) $\alpha = \dfrac{3}{5}$

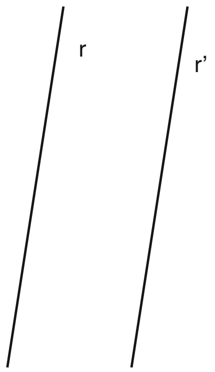

Figura 98

(c) $\alpha = -\dfrac{5}{3}$

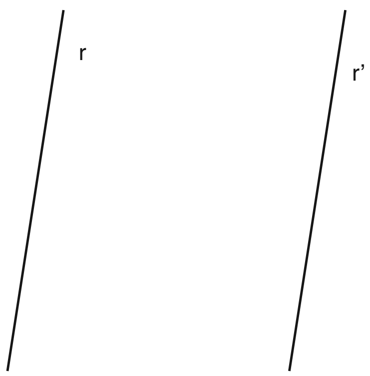

Figura 99

(d) $\alpha = \dfrac{m}{n}$

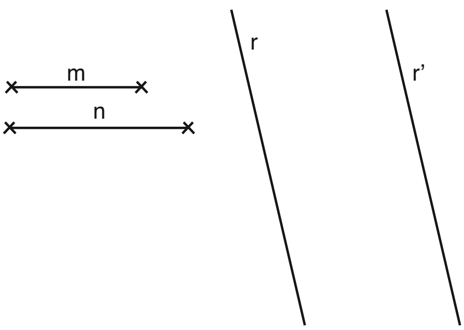

Figura 100

Multiplicação da circunferência

Pela propriedade 2 os raios homólogos de duas circunferências são paralelos. Neste caso, para multiplicarmos uma circunferência basta multiplicarmos o centro, pois a extremidade do raio pode ser conduzido por sua reta de homotetia. Portanto, a multiplicação de uma circunferência deve seguir os seguintes procedimentos:

- Trace a reta determinada pelo centro de homotetia O e pelo centro da circunferência C dada e denomine-a por r.

- Trace um outra reta pelo ponto O distinta de r e sobre esta reta construa os segmentos com origem em O de comprimentos m e n que determinam a razão de homotetia $\frac{m}{n}$. Denomine as respectivas extremidades por O_2 e O_1.

- Una os pontos O_1 e C por uma reta e denomine-a por s. Trace pelo ponto O_2 uma reta s' paralela a s interceptando a reta r no ponto C' que será o centro da circunferência homotética.

- A reta s intercepta a circunferência dada no ponto A. Conduza o ponto A à reta s' por sua reta de homotetia obtendo o ponto A'. Construa a circunferência de centro em C' que passe por A'.

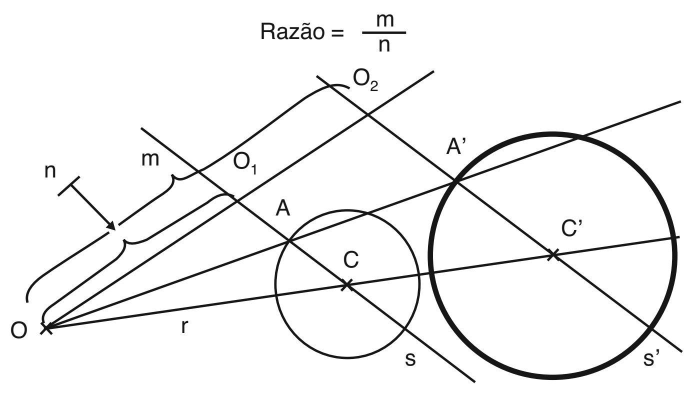

Figura 101

(1) Duas circunferências são ditas concêntricas se possuem os centros coincidentes.

Observação: Duas circunferências são sempre homotéticas. Os centros de homotetia podem ser até dois, um de homotetia inversa um de homotetia direta. Se as circunferência são concêntricas(1) então existe apenas o centro de homotetia direta que coincide com o centros das circunferências. Se as circunferências não são concêntricas e possuem os raios de mesmo comprimento então existe apenas o centro de homotetia inversa que é o ponto médio dos centros. No caso de circunferências que não são concêntricas lembre que os raios homotéticos devem ser paralelos, mas os raios apesar de paralelos podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos determinando respectivamente o centro de homotetia direta e o centro de homotetia inversa. Podemos obter os centros de homotetia da seguinte forma:

- Trace um diâmetro em cada circunferência paralelos.
- Trace a reta r pelos centros das circunferências.
- Trace uma reta pelas extremidades dos dois diâmetros que estão no mesmo semiplano determinado por r interceptando r em O_1.
- Trace uma reta pelas extremidades dos dois diâmetros que estão em semiplanos opostos interceptando r em O_2.
- O ponto O_1 é o centro de homotetia direta e o ponto O_2 é o centro de homotetia inversa.

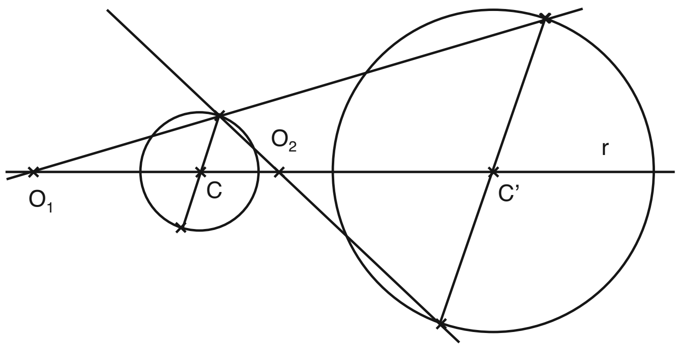

Figura 102

Observações:

1. Se a circunferência maior não contém a menor então o centro de homotetia direta é o ponto de encontro das retas tangentes comuns externas das circunferências.

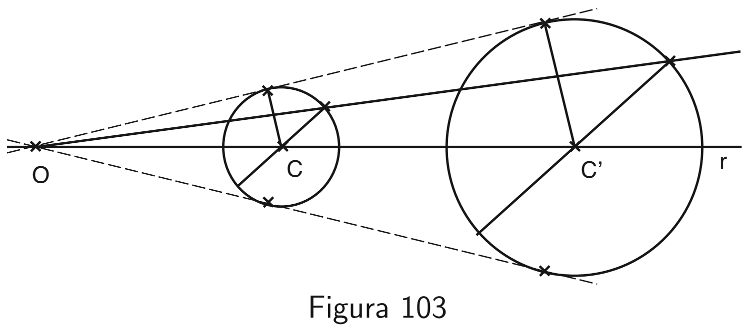

Figura 103

2. Se as circunferências não se interceptam então o centro de homotetia inversa é o ponto de encontro das retas tangentes comuns internas das circunferências.

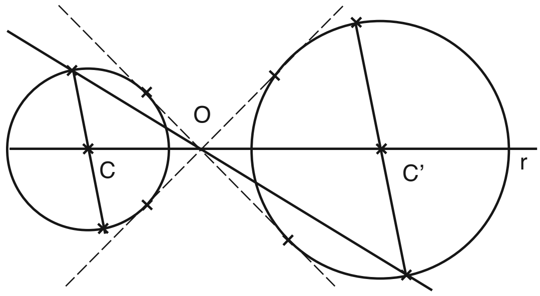

Figura 104

3. Se as circunferências são tangentes externas então o centro de homotetia inversa é o ponto de tangência.

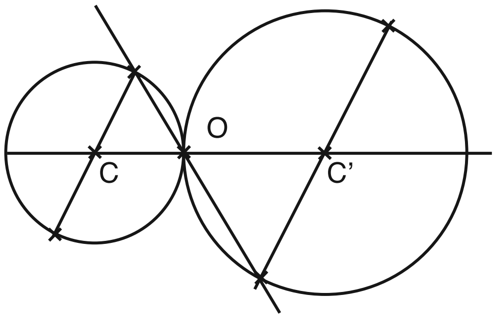

Figura 105

4. Se as circunferências são tangentes internas então o centro de homotetia direta é o ponto de tangência.

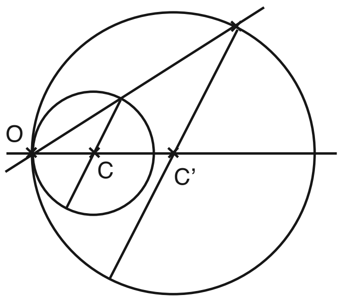

Figura 106