.Problema para ajudar na escola: O raio da circunferência inscrita

Problema

(A partir da 1ª série do E. M. – Nível de dificuldade: Difícil**)**

(**LV Olimpiada Matemática Española**, 2019- Adaptado) Seja n um número inteiro maior do que 1 e considere o triângulo ABC com as seguintes propriedades:

- os lados AB e AC têm o mesmo comprimento;
- o lado BC mede $4n$ centímetros;
- a altura relativa ao lado BC mede $\left(n^2-1\right)$ centímetros.

Determinar todos os valores de n para os quais a medida em centímetros do raio da circunferência inscrita no triângulo ABC seja um número inteiro.

Lembretes

Informações importantes sobre triângulos e circunferências:

(1) O centro da circunferência inscrita em um triângulo é o **incentro**, que é o encontro das três bissetrizes internas desse triângulo.(Bissetriz de um triângulo é um segmento com extremidades em um vértice e no respectivo lado oposto e que divide o ângulo interno definido por esse vértice em dois ângulos com a mesma medida.)

(2) A bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles também é uma mediana e uma altura.

(3) Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Congruência de triângulos retângulos:

(4) Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então estes triângulos são congruentes.

Notação

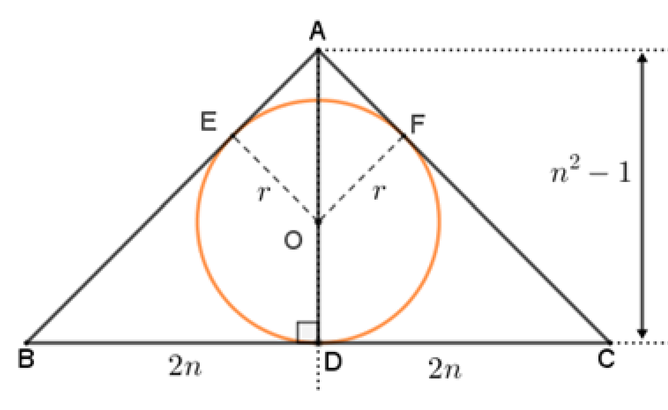
Denotaremos o segmento definido por dois pontos genéricos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e o seu comprimento por XY.

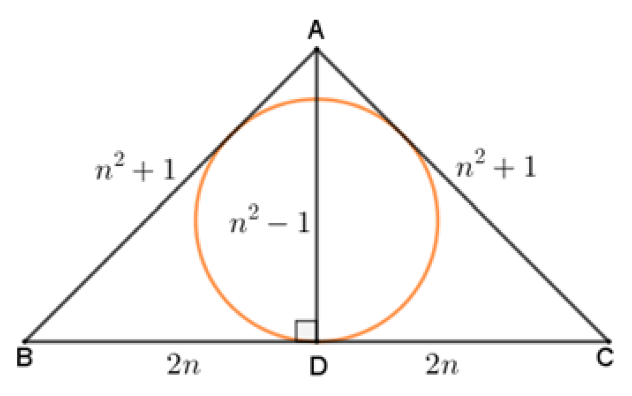
Solução 1

Vamos fazer duas figuras com os dados do problema, para facilitar a nossa solução.

- Na figura da esquerda, já vamos inserir algumas conclusões que obtemos utilizando os dois primeiros **Lembretes**:
  como o ponto O é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, a semirreta AO é uma bissetriz e, portanto, o segmento $\overline{AD}$ é também a mediana e a altura desse triângulo relativa à base $\overline{BC}$. Dessa forma, o comprimento em centímetros dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ é $2n$.
  Vamos considerar que E e F são pontos de tangência da circunferência inscrita e que r é o comprimento do raio dessa circunferência.
- Note que, como os triângulos ABD e ACD são retângulos, o Teorema de Pitágoras nos permite obter os comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$:

$$AB^2=(2n)^2+\left(n^2-1\right)^2$$
$$AB^2=4n^2+n^4-2n^2+1$$
$$AB^2=4n^2+n^4-2n^2+1$$
$$AB^2=n^4+2n^2+1$$
$$AB^2=\left(n^2+1\right)^2$$
$$\boxed{AB=n^2+1}.$$

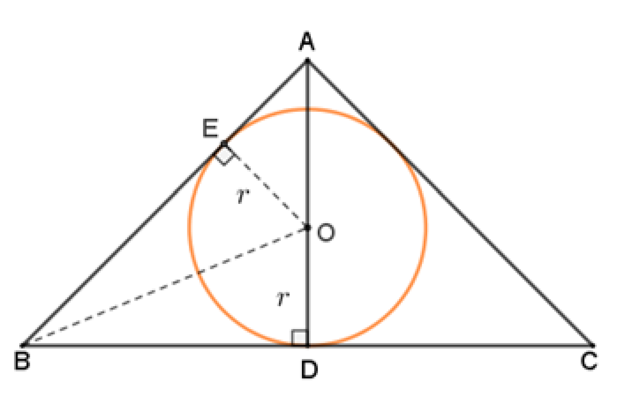


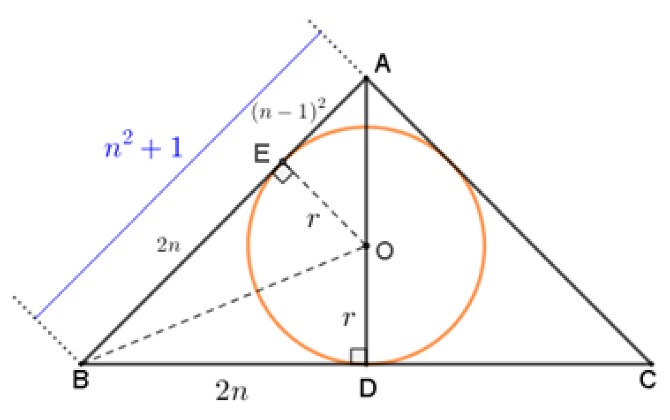


- Observe agora que, utilizando o caso de congruência citado nos Lembretes, podemos concluir que os triângulos OEB e ODB são congruentes.

  Assim, $EB=DB=2n$ e, portanto, segue que:

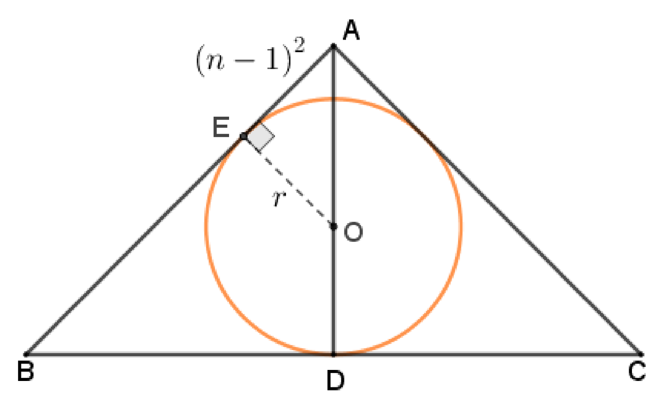
$$AE=AB-EB$$
$$AE=\left(n^2+1\right)-2n$$
$$AE=n^2-2n+1$$
$$\boxed{AE=(n-1)^2}.$$





- Aplicando uma vez mais o Teorema de Pitágoras, agora ao triângulo retângulo AEO, temos que:

$$AO^2=EO^2+AE^2$$
$$AO^2=r^2+\left((n-1)^2\right)^2$$
$$AO=\sqrt{r^2+\left(n^2-1\right)^4}.$$



- Como $AD=AO+OD$, segue que:

$$n^2-1=\sqrt{r^2+(n-1)^4}+r$$
$$\sqrt{r^2+(n-1)^4}=n^2-1-r$$
$$\left(\sqrt{r^2+(n-1)^4}\right)^2=\left(n^2-1-r\right)^2$$
$$r^2+(n-1)^4=\left(n^2-1-r\right)^2$$
$$r^2+n^4-4n^3+6n^2-4n+1=n^4-2n^2-2rn^2+2r+1+r^2$$
$$\cancel{r^2}+\cancel{n^4}-4n^3+6n^2-4n+\cancel{1}=\cancel{n^4}-2n^2-2rn^2+2r+\cancel{1}+\cancel{r^2}$$
$$-4n^3+6n^2-4n=-2n^2-2rn^2+2r$$
$$-4n^3+8n^2-4n=-2rn^2+2r$$
$$rn^2-r=2n^3-4n^2+2n$$
$$r\left(n^2-1\right)=2n\left(n^2-2n+1\right)$$
$$r\,(n+1)\,(n-1)=2n(n-1)^2$$
$$r\,(n+1)\,\cancel{(n-1)}=2n\,(n-1)\,\cancel{(n-1)}$$
$$r\,(n+1)=2n\,(n-1)$$
$$r=2n\cdot\frac{n-1}{n+1}. \qquad (i)$$

Queremos que o comprimento r do raio da circunferência seja um número natural; assim, vamos tentar reescrever (i) explicitando números inteiros do lado direito da igualdade:

$$r=2n\cdot\frac{n-1}{n+1}$$
$$r=2n\cdot\frac{n+1-2}{n+1}=2n\cdot\left(\frac{n+1}{n+1}-\frac{2}{n+1}\right)$$
$$r=2n\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=2n-\frac{4n}{n+1}$$
$$r=2n-\frac{4n+4-4}{n+1}$$
$$r=2n-\frac{4n+4}{n+1}+\frac{4}{n+1}=2n-\frac{4\cdot(n+1)}{n+1}+\frac{4}{n+1}$$
$$r=2n-4+\frac{4}{n+1}.$$

Perceba que $2n-4$ é um número inteiro; assim, para que r seja de fato um inteiro positivo, necessariamente $\dfrac{4}{n+1}$ deve ser um número natural.

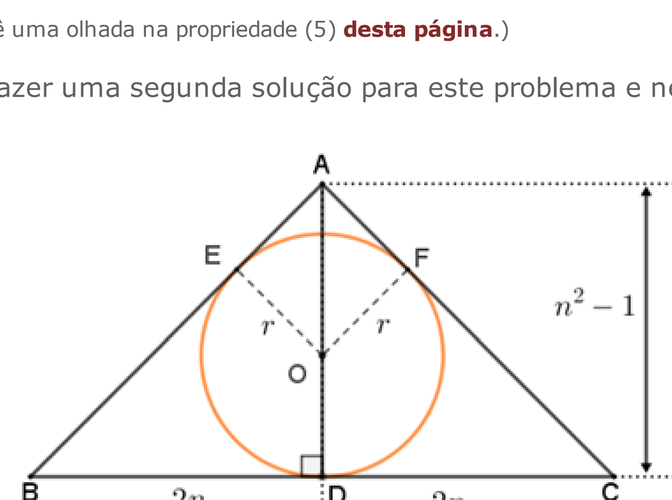
Dessa forma, a princípio, temos apenas três opções: $n+1=1$, $n+1=2$ e $n+1=4$; e, com isso, teríamos $n=0$, $n=1$ e $n=3$. Mas, pelos dados do problema, n é um número inteiro maior do que 1; portanto, $\boxed{n=3}$.

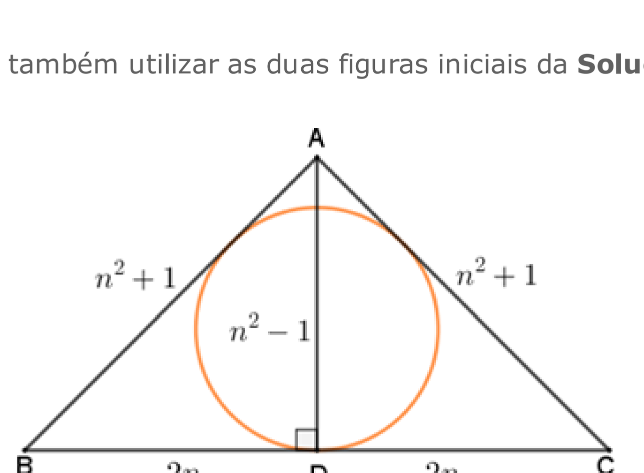
Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Se utilizarmos a fórmula que nos garante que a área de um triângulo pode ser obtida multiplicando-se o semiperímetro desse triângulo pelo raio da circunferência nele inscrita, poderíamos obter a expressão (i) da solução anterior de uma outra forma. (Se você não se lembra desse resultado, dê uma olhada na propriedade (5) **desta página**.)

Vamos então fazer uma segunda solução para este problema e nela vamos também utilizar as duas figuras iniciais da **Solução 1**.





Observando a figura da direita, vemos um triângulo cujos lados medem $n^2+1, 4n, n^2+1$ e a altura mede n^2-1. A área S desse triângulo pode ser obtida por:

$$S=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{4n\times\left(n^2-1\right)}{2}$$

$$S=\text{semiperímetro}\times r=\frac{n^2+1+4n+n^2+1}{2}\times r.$$

Assim, segue que:

$$\frac{4n\times\left(n^2-1\right)}{2}=\frac{n^2+1+4n+n^2+1}{2}\times r$$
$$4n\times\left(n^2-1\right)=\left(n^2+1+4n+n^2+1\right)\times r$$
$$4n\times\left(n^2-1\right)=\left(2n^2+2+4n\right)\times r$$
$$2n\times\left(n^2-1\right)=\left(n^2+1+2n\right)\times r$$
$$2n\times(n+1)\times(n-1)=(n+1)^2\times r$$
$$2n\times(n-1)=(n+1)\times r$$
$$r=2n\times\frac{n-1}{n+1}. \qquad (i)$$

Daqui para frente, a finalização é idêntica à da solução anterior.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.