.Problema para ajudar na escola: O menor valor

Problema

(A partir da 1ª série do E. M. – Nível de dificuldade: Difícil**)**

(**UECE** – 2017) Sejam x e y números reais tais que $2x+5y=10$.
Qual é o menor valor que a expressão x^2+y^2 pode assumir?

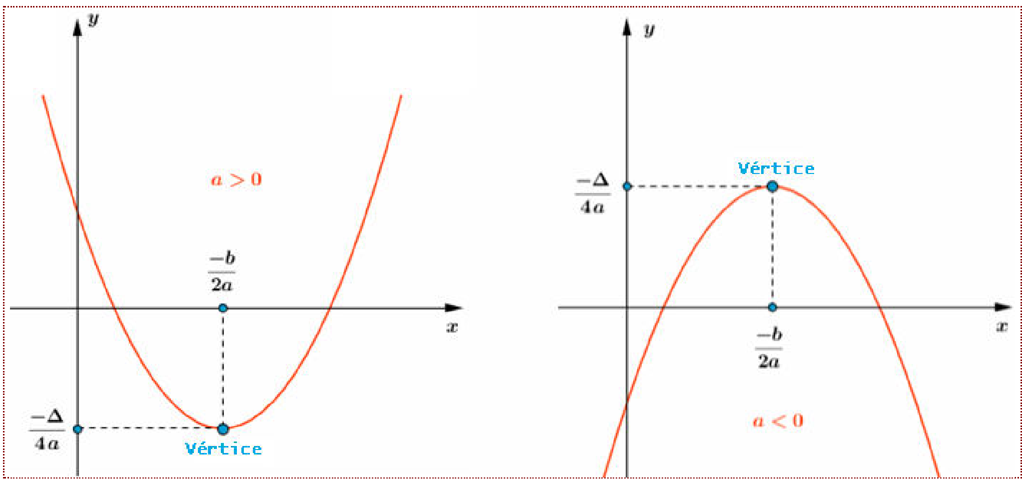
Ajuda

(1) O gráfico de uma função quadrática $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $h(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$, é uma parábola com diretriz paralela ao eixo OX, sendo sua concavidade voltada para cima se $a>0$ e voltada para baixo se $a<0$.

(2) Se $\Delta=b^2-4ac$, as coordenadas do vértice da parábola são dadas por $(x_v,y_v)=\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, sendo que $x_v=\dfrac{-b}{2a}$ e $y_v=\dfrac{-\Delta}{4a}$ indicam, respectivamente:

✓ o ponto de mínimo e o valor mínimo da função h, se a concavidade estiver voltada para cima;
✓ o ponto de máximo e o valor máximo da função h, se a concavidade estiver voltada para baixo.

Visualizem as informações fornecidas no lembrete (2), se $\Delta>0$:



Solução 1

Sejam x e y números reais tais que $2x + 5y = 10$ e seja $\boxed{z = x^2 + y^2}$.

De $2x + 5y = 10$ segue que $y = \dfrac{10 - 2x}{5}$; assim, podemos reescrever a expressão que define z em função apenas de x :

$$
\begin{aligned}
& z = x^2 + y^2 \\
& z = x^2 + \left(\frac{10 - 2x}{5}\right)^2 \\
& z = x^2 + \frac{100 - 40x + 4x^2}{25} \\
& z = \frac{25x^2 + 100 - 40x + 4x^2}{25} \\
& z = \frac{1}{25} \cdot \left(29x^2 - 40x + 100\right) .
\end{aligned}
$$

Vamos determinar o menor valor de z e para isso vamos considerar a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 29x^2 - 40x + 100$.

Observe que o coeficiente de x^2 da expressão que define f é positivo; assim, utilizando as informações da **Ajuda**, concluímos que a concavidade da parábola do gráfico de f é voltada para cima. Consequentemente, a segunda coordenada do vértice dessa parábola, digamos y_v, é o menor valor assumido pela função e, portanto, o menor valor de z é $\boxed{\dfrac{1}{25} \cdot y_v}$.

Vamos, então, calcular y_v:

$$
\begin{aligned}
& y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left(b^2 - 4ac\right)}{4a} \\
& y_v = \frac{-\left((-40)^2 - 4 \cdot 29 \cdot 100\right)}{4 \cdot 29} = \frac{-(1600 - 11600)}{4 \cdot 29} \\
& y_v = \frac{10\,000}{4 \cdot 29} = \frac{2500}{29} .
\end{aligned}
$$

Dessa forma, se denotarmos por z_{min} o menor valor da expressão $x^2 + y^2$, respeitadas as condições do problema, então:

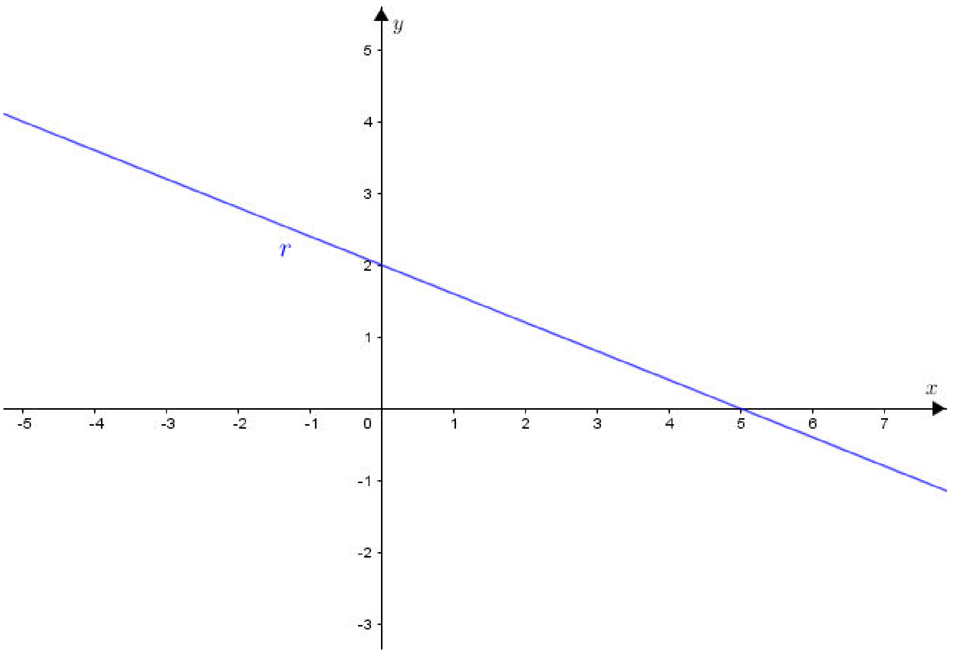
$$
z_{min} = \frac{1}{25} \cdot y_v = \frac{1}{25} \cdot \frac{2500}{29} = \frac{100}{29}.
$$

Assim, o valor procurado é $\boxed{\dfrac{100}{29}}$.

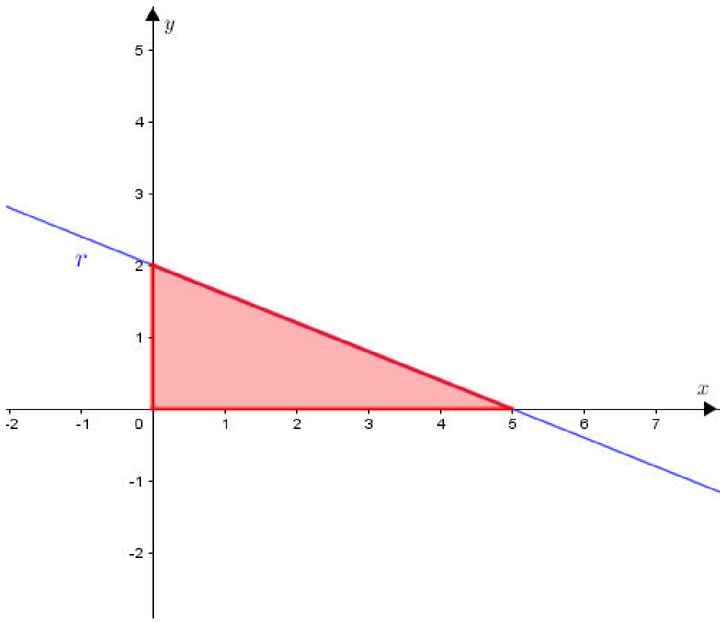
Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Observe que a expressão $2x + 5y = 10$ representa uma reta em um plano cartesiano xOy.



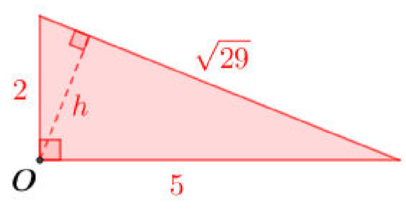
Repare que a reta r e os eixos Ox e Oy definem um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos 2 e 5 e a hipotenusa tem comprimento $\sqrt{29}$.



Por outro lado, sabemos que a distância de qualquer ponto $P = (x, y)$ à origem é dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$; portanto, a expressão $x^2 + y^2$ nos fornece o quadrado da distância de um ponto P do plano cartesiano à origem.

- Assim, geometricamente, o que o problema está pedindo é o quadrado da distância entre a reta r e a origem do sistema cartesiano, $O = (0, 0)$.

Observe que a distância entre a reta r e o ponto O é a altura h do triângulo vermelho que aparece na figura anterior, e que destacamos na figura ao lado, com relação à sua hipotenusa.



Nesse caso, podemos utilizar a relação métrica no triângulo retângulo que nos garante que **o produto entre os comprimentos da hipotenusa e da altura é igual ao produto dos comprimentos dos dois catetos**.

Assim:

$$\sqrt{29} \cdot h = 2 \cdot 5$$

$$h = \frac{10}{\sqrt{29}} \approx 1,86\,.$$

Portanto, $\boxed{h^2 = \frac{100}{29}}$.

Um applet para ajudar

No applet abaixo, você visualizará a reta r e um ponto P. Movimentando o ponto P sobre r o aplicativo fornecerá as respectivas distâncias dos pontos que definem as posições P à origem $O=(0,0)$ do sistema cartesiano xOy em questão. Com isso, você poderá visualizar e comprovar a resposta do problema.

Instruções:
(1) Espere o aplicativo carregar completamente.
(2) Clique no ponto **P**, mantenha o mouse pressionado e faça o movimento.
(3) Para retornar à posição inicial, clique no centro das setinhas circulares que aparecem no canto superior direito do aplicativo.

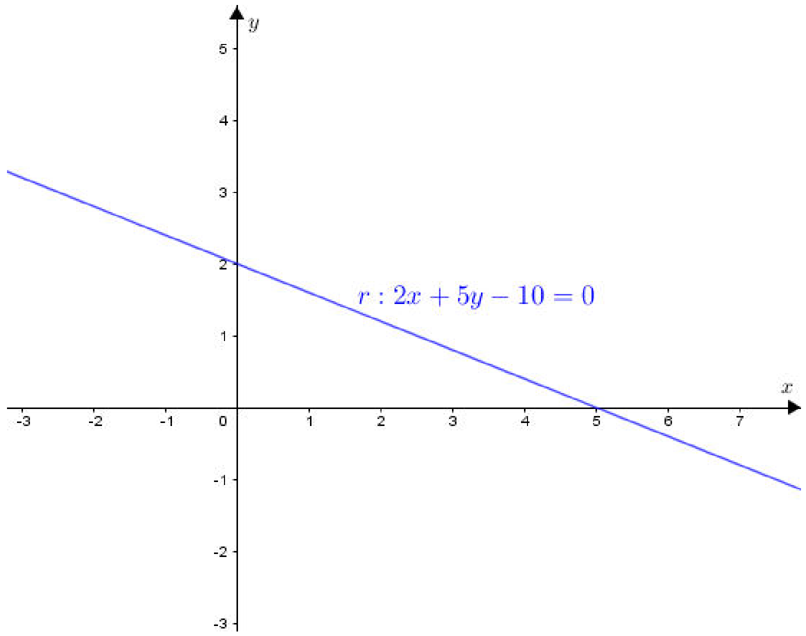
Clique AQUI para abrir o applet.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 3

Duas observações iniciais:

- A igualdade $2x+5y=10$ define uma reta r em um plano cartesiano xOy.



- A distância de qualquer ponto $P=(x,y)$ à origem é dada por $\sqrt{x^2+y^2}$ e, portanto, a expressão x^2+y^2 nos fornece o quadrado da distância de um ponto P do plano cartesiano à origem.

Assim, geometricamente, o que o problema está pedindo é o quadrado da distância entre a reta r e a origem do sistema cartesiano, $O=(0,0)$.

- **Vamos então calcular a distância entre a reta r e ao ponto O.**

A fórmula que nos fornece diretamente a distância d entre um ponto $P=(x_0, y_0)$ e uma reta definida por $ax+by+c=0$ é:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Dessa forma, a distância entre a reta r e o ponto $O=(0,0)$ pode ser assim calculada:

$$d=\frac{|2\times 0+5\times 0-10|}{\sqrt{2^2+5^2}}$$

$$d=\frac{10}{\sqrt{2^2+5^2}}$$

$$\boxed{d=\frac{10}{\sqrt{29}}}.$$

Com isso, temos que o quadrado da distância entre r e o ponto $O=(0,0)$ é $\boxed{\frac{100}{29}}$, que é a resposta do problema.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.