.Problema para ajudar na escola: Elementos de um conjunto – um desafio

Problema

(A partir do 9º ano do E. F. – Nível de dificuldade: Difícil)

(**CERPERJ 2010** – Adaptado) Considere C o conjunto formado por todos os números naturais p para os quais $\dfrac{p^2+5}{p+2}$ é também um número natural.
Qual é o número de elementos de C?

Solução

Seja p um número natural tal que $\dfrac{p^2+5}{p+2}$ também seja um número natural.
A princípio, este problema parece impossível de ser resolvido, principalmente se alguém pensar em sair substituindo valores de p na fração para produzir números naturais. Mas o que faz deste problema um desafio é que aqui entra um artifício:

- $p^2+5=(p^2-4)+9.$

Bem, você pode estar se perguntando – *Tá, e daí?*

Escrevendo p^2+5 como $(p^2-4)+9$, o quociente $\dfrac{p^2+5}{p+2}$ pode ser reescrito de uma forma muito conveniente, observe:

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{p^2+5}{p+2}} &= \frac{(p^2-4)+9}{p+2}\\ &= \frac{p^2-4}{p+2}+\frac{9}{p+2}\\ &= \frac{(p+2)\cdot(p-2)}{p+2}+\frac{9}{p+2}\\ &= \frac{\cancel{(p+2)}\cdot(p-2)}{\cancel{p+2}}+\frac{9}{p+2}\\ &= \boxed{(p-2)+\frac{9}{p+2}}.\end{aligned}$$

Com isso, vamos procurar números naturais p para os quais $(p-2)+\dfrac{9}{p+2}$ é um número natural.

Para facilitar o nosso raciocínio, inicialmente procuraremos números inteiros p para os quais $(p-2)+\dfrac{9}{p+2}$ seja um número inteiro.

- Seja, então, p um número inteiro tal que $(p-2)+\dfrac{9}{p+2}$ é também inteiro.

  Note que $p-2$ é um número inteiro; assim, para que $(p-2)+\dfrac{9}{p+2}$ seja inteiro, necessariamente $\dfrac{9}{p+2}$ é um número inteiro.
  Sabemos que, para que uma fração com numerador e denominador inteiros defina um número inteiro, o denominador deve ser um divisor do numerador.
  No nosso caso, $p+2$ deve ser um divisor de 9 e, como isso, temos as seguintes possibilidades para $p+2$:

  - $-9,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 9.$

  Vamos analisar esses seis valores, lembrando que, na verdade, estamos interessados em valores naturais de p.

  - Se $p+2=-9$, então $p=-11$ e -11 não é um número natural.
  - Se $p+2=-3$, então $p=-5$ e -5 não é um número natural.
  - Se $p+2=-1$, então $p=-3$ e -3 não é um número natural.
  - Se $p+2=1$, então $p=-1$ e -1 não é um número natural.
  - Se $p+2=3$, então $p=1$ e $\boxed{1}$ é um valor que nos interessa pois é um número natural.
  - Se $p+2=9$, então $p=7$ e $\boxed{7}$ é um valor que também nos interessa pois é um número natural.

Para quem gosta de ver para crer, veja que:

- Se $p=1$, então $\dfrac{p^2+5}{p+2}=\dfrac{6}{3}=3$ (um número natural);
- Se $p=7$, então $\dfrac{p^2+5}{p+2}=\dfrac{54}{9}=6$ (um número natural).

Portanto, $C=\{1,7\}$, ou seja, $\boxed{C \text{ tem } 2 \text{ elementos}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.