.Problema para ajudar na escola: Vamos preencher uma tabela?

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Vamos preencher uma tabela 3×3 com os números

$$\boxed{1\,,\,7\,,\,9\,,\,11\,,\,12\,,\,14\,,\,16\,,\,17\,,\,19}$$

de tal forma que:

- nos cantos do tabuleiro escreveremos apenas números primos;
- no centro do tabuleiro não escreveremos um quadrado perfeito.

De quantas formas podemos fazer o preenchimento?

?	?	?
?	?	?
?	?	?

Ajuda

Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, para três eventos:

Se

- um evento **E1** puder ocorrer de m_1 maneiras,
- um evento **E2** puder ocorrer de m_2 maneiras,
- um evento **E3** puder ocorrer de m_3 maneiras,

e todos esses eventos forem independentes entre si, isto é, a ocorrência de um não muda a quantidade de possibilidades para a ocorrência de outro, então a quantidade de maneiras em que os três eventos ocorrem ao mesmo tempo é

$$\boxed{m_1 \times m_2 \times m_3}\,.$$

(Se você não se lembra desse Princípio, seria interessante dar uma passadinha **nesta Sala de Estudo**.)

Solução

Observemos inicialmente que dentre os números $1\,,\,7\,,\,9\,,\,11\,,\,12\,,\,14\,,\,16\,,\,17\,,\,19$:

- quatro são primos: $7,\ 11,\ 17,\ 19$;

- três são quadrados perfeitos: $1=1^2$, $9=3^2$, $16=4^2$.

Vamos então à contagem do número de modos com que podemos preencher a tabela 3×3 do problema.

> (i) Vamos iniciar o preenchimento pelos cantos da tabela. Note que temos quatro números primos que devem ser colocados nos cantos da tabela. Assim, como são quatro números a serem colocados em quatro lugares, podemos fazê-lo de $4!=24$ maneiras diferentes.
>
> (ii) Vamos agora preencher o centro da tabela e, no centro, devemos colocar um número que não seja um quadrado perfeito. Temos cinco números não utilizados: $1\,,\,9\,,\,12\,,\,14\,,\,16$ e, desses, três são quadrados perfeitos. Dessa forma, devemos utilizar para o centro da tabela o 12 ou o 14, ou seja, temos 2 possibilidades.
>
> (iii) Feito o preenchimento dos cantos e do centro da tabela, restam ainda $9-4-1=4$ números a serem utilizados em quatro posições, sendo que esses números podem ocupar qualquer uma dessas quatro posições. Então podemos distribuí-los de $4!=24$ maneiras.

Por (i), (ii) e (iii), utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, concluímos que a tabela pode ser preenchida de $24\times 2\times 24=\boxed{1152}$ maneiras diferentes.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.