

.Problema para ajudar na escola: Valor máximo e valor mínimo



Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2\cos^4 x + 3\operatorname{sen}^5 x$.
Determinar o valor máximo e o valor mínimo de f .



Lembretes

Para resolvermos este problema, utilizaremos desigualdades básicas da trigonometria.

Se x é um número real, então:

$$(1) -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1; \quad (2) 0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1; \quad (3) -1 \leq \cos x \leq 1; \quad (4) 0 \leq \cos^2 x \leq 1.$$

Solução 1

Seja x um número real.

- Como $\operatorname{sen}^2 x \geq 0$, segue de (1) que

$$-\operatorname{sen}^2 x \leq \operatorname{sen}^3 x \leq \operatorname{sen}^2 x. \quad (i)$$

Como $\operatorname{sen}^2 x \leq 1$, então $-1 \leq -\operatorname{sen}^2 x$ e, portanto, segue de (i) que

$$-1 \leq -\operatorname{sen}^2 x \leq \operatorname{sen}^3 x \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1,$$

ou seja,

$$-1 \leq \operatorname{sen}^3 x \leq 1. \quad (ii)$$

Utilizando mais uma vez o fato de que $\operatorname{sen}^2 x \geq 0$, segue de (ii) que

$$-\operatorname{sen}^2 x \leq \operatorname{sen}^5 x \leq \operatorname{sen}^2 x. \quad (iii)$$

Multiplicando as desigualdades (iii) por 3, obtemos:

$$\boxed{-3\operatorname{sen}^2 x \leq 3\operatorname{sen}^5 x \leq 3\operatorname{sen}^2 x}. \quad (iv)$$

- Como $\cos^2 x \geq 0$, segue de (4) que

$$0 \leq \cos^4 x \leq \cos^2 x. \quad (v)$$

Multiplicando agora as desigualdades (v) por 2 obtemos:

$$\boxed{0 \leq 2\cos^4 x \leq 2\cos^2 x}. \quad (vi)$$

Somando as desigualdades (iv) e (vi), obtemos:

$$-3\text{sen}^2x + 0 \leq 3\text{sen}^5x + 2\text{cos}^4x \leq 3\text{sen}^2x + 2\text{cos}^2x ,$$

ou ainda

$$-3\text{sen}^2x \leq 2\text{cos}^4x + 3\text{sen}^5x \leq 3\text{sen}^2x + 2\text{cos}^2x . \quad (\text{vii})$$

Observe que $2\text{cos}^2x \leq 3\text{cos}^2x$; assim, de (vii), segue que

$$-3\text{sen}^2x \leq 2\text{cos}^4x + 3\text{sen}^5x \leq 3\text{sen}^2x + 2\text{cos}^2x \leq 3\text{sen}^2x + 3\text{cos}^2x . \quad (\text{viii})$$

Por outro lado, $-3\text{sen}^2x - 3\text{cos}^2x \leq -3\text{sen}^2x$ (perceba que $-3\text{cos}^2x \leq 0$). Logo, de (viii), segue que

$$-3\text{sen}^2x - 3\text{cos}^2x \leq -3\text{sen}^2x \leq 2\text{cos}^4x + 3\text{sen}^5x \leq 3\text{sen}^2x + 2\text{cos}^2x \leq 3\text{sen}^2x + 3\text{cos}^2x . \quad (\text{viii})$$

e, dessa forma, obtemos que:

$$-3\text{sen}^2x - 3\text{cos}^2x \leq 2\text{cos}^4x + 3\text{sen}^5x \leq 3\text{sen}^2x + 3\text{cos}^2x .$$

$$-3(\text{sen}^2x + \text{cos}^2x) \leq 2\text{cos}^4x + 3\text{sen}^5x \leq 3(\text{sen}^2x + \text{cos}^2x) .$$

Como $\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1$ e $f(x) = 2\text{cos}^4x + 3\text{sen}^5x$, as últimas desigualdades nos permitem concluir que:

$$-3 \leq f(x) \leq 3 .$$

Como o problema pede os valores máximo e mínimo de f , precisamos assegurar qual o menor e qual o maior valor do intervalo $[-3, 3]$ que efetivamente são assumidos como imagens de f .

Note que:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\text{cos}^4\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\text{sen}^5\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(\text{cos}\frac{\pi}{2})^4 + 3(\text{sen}\frac{\pi}{2})^5 = 2 \cdot (0)^4 + 3 \cdot (1)^5 = 3$$

e

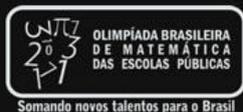
$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\text{cos}^4\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\text{sen}^5\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2(\text{cos}\left(-\frac{\pi}{2}\right))^4 + 3(\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right))^5 = 2 \cdot (0)^4 + 3 \cdot (-1)^5 = 0 - 3 = -3 .$$

Pelo exposto,

- o valor mínimo de f é -3 ,
- o valor máximo de f é 3 .

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Somando novos talentos para o Brasil

Apoio



Realização

