.Problema para ajudar na escola: Valor máximo e valor mínimo

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2cos^4 x + 3sen^5 x$.
Determinar o valor máximo e o valor mínimo de f.

Lembretes

Para resolvermos este problema, utilizaremos desigualdades básicas da trigonometria.

Se x é um número real, então:

$(1)\ -1 \leqslant senx \leqslant 1$; $(2)\ 0 \leqslant sen^2 x \leqslant 1$; $(3)\ -1 \leqslant cosx \leqslant 1$; $(4)\ 0 \leqslant cos^2 x \leqslant 1$.

Solução 1

Seja x um número real.

- Como $sen^2 x \geqslant 0$, segue de (1) que
$$-sen^2 x \leqslant sen^3 x \leqslant sen^2 x. \qquad (i)$$
Como $sen^2 x \leqslant 1$, então $-1 \leqslant -sen^2 x$ e, portanto, segue de (i) que
$$-1 \leqslant -sen^2 x \leqslant sen^3 x \leqslant sen^2 x \leqslant 1\ ,$$
ou seja,
$$-1 \leqslant sen^3 x \leqslant 1. \qquad (ii)$$
Utilizando mais uma vez o fato de que $sen^2 x \geqslant 0$, segue de (ii) que
$$-sen^2 x \leqslant sen^5 x \leqslant sen^2 x. \qquad (iii)$$
Multiplicando as desigualdades (iii) por 3. obtemos:
$$\boxed{-3sen^2 x \leqslant 3sen^5 x \leqslant 3sen^2 x}\ . \qquad (iv)$$

- Como $cos^2 x \geqslant 0$, segue de (4) que
$$0 \leqslant cos^4 x \leqslant cos^2 x. \qquad (v)$$
Multiplicando agora as desigualdades (v) por 2 obtemos:
$$\boxed{0 \leqslant 2cos^4 x \leqslant 2cos^2 x}\ . \qquad (vi)$$

Somando as desigualdades (iv) e (vi), obtemos:

$$-3sen^2x+0 \leqslant 3sen^5x+2cos^4x \leqslant 3sen^2x+2cos^2x \quad ,$$

ou ainda

$$-3sen^2x \leqslant 2cos^4x+3sen^5x \leqslant 3sen^2x+2cos^2x\,. \qquad (vii)$$

Observe que $2cos^2x \leqslant 3cos^2x$; assim, de (vii), segue que

$$-3sen^2x \leqslant 2cos^4x+3sen^5x \leqslant 3sen^2x+2cos^2x \leqslant 3sen^2x+3cos^2x\,. \qquad (viii)$$

Por outro lado, $-3sen^2x-3cos^2x \leqslant -3sen^2x$ (perceba que $-3cos^2x \leqslant 0$). Logo, de $(viii)$, segue que

$$-3sen^2x-3cos^2x \leqslant -3sen^2x \leqslant 2cos^4x+3sen^5x \leqslant 3sen^2x+2cos^2x \leqslant 3sen^2x+3cos^2x\,. \qquad (viii)$$

e, dessa forma, obtemos que:

$$-3sen^2x-3cos^2x \leqslant 2cos^4x+3sen^5x \leqslant 3sen^2x+3cos^2x\,.$$

$$-3\left(sen^2x+cos^2x\right) \leqslant 2cos^4x+3sen^5x \leqslant 3\left(sen^2x+cos^2x\right)\ .$$

Como $sen^2x+cos^2x=1$ e $f(x)=2cos^4x+3sen^5x$, as últimas desigualdades nos permitem concluir que:

$$-3 \leqslant f(x) \leqslant 3\,.$$

Como o problema pede os valores máximo e mínimo de f, precisamos assegurar qual o menor e qual o maior valor do intervalo $[-3,3]$ que efetivamente são assumidos como imagens de f.

Note que:

$$f(\tfrac{\pi}{2})=2cos^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+3sen^5\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=2\big(cos\tfrac{\pi}{2}\big)^4+3\big(sen\tfrac{\pi}{2}\big)^5=2\cdot(0)^4+3\cdot(1)^5=3$$

e

$$f(-\tfrac{\pi}{2})=2cos^4\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+3sen^5\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=2\big(cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\big)^4+3\big(sen\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\big)^5=2\cdot(0)^4+3\cdot(-1)^5=0-3=-3.$$

Pelo exposto,

- o valor mínimo de f é $\boxed{-3}$,
- o valor máximo de f é $\boxed{3}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.