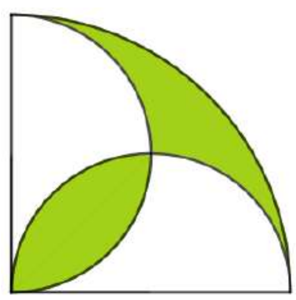
.Problema para ajudar na escola: Uma área verde

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(**XXX OPM** – Adaptado) Na figura, vemos um quarto de círculo, com $20\,cm$ de raio, e dois semicírculos internos a ele. Determinar a área da região colorida de verde.

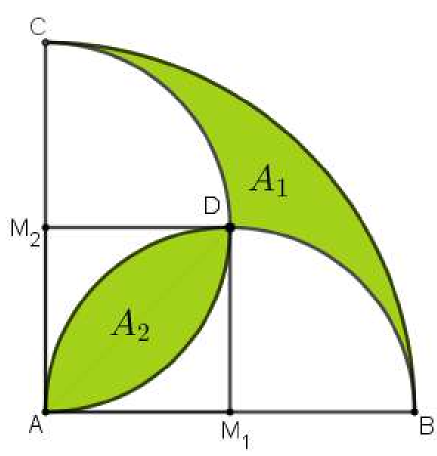


Solução 1

Vamos fazer uma construção geométrica para ajudar na solução do problema:

- considere o quadrado AM_1DM_2, construído a partir dos pontos médios M_1 e M_2 dos diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, conforme mostra a próxima figura.

Devemos calcular a área da região colorida de verde, que denominaremos de A. Para isso, calcularemos separadamente as áreas indicadas na figura como A_1 e A_2.

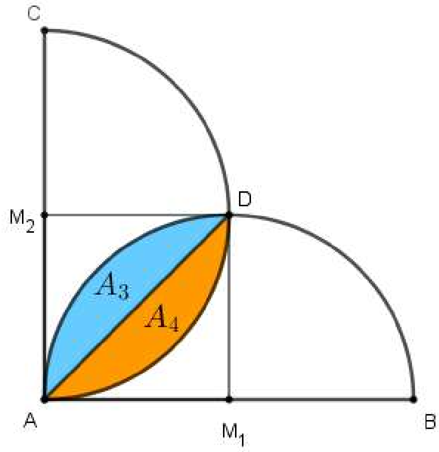


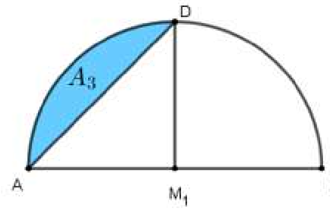
- Para calcularmos A_2, vamos observar apenas os semicírculos de diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e vamos dividir a região de área A_2 utilizando uma das diagonais do quadrado AM_1DM_2, conforme ilustrado na figura ao lado.

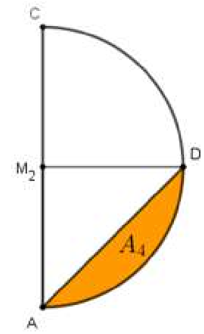
  Observe que $A_2 = A_3 + A_4$ e que $A_3 = A_4$.
  Com efeito, perceba que:

  - A_3 é a diferença entre a metade da área do semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$ e a área do triângulo AM_1D;
  - A_4 é a diferença entre a metade da área do semicírculo de diâmetro $\overline{AC}$ e a área do triângulo AM_2D.

  Assim:







$$A_3 = A_4 = \frac{\frac{\pi 10^2}{2}}{2} - \frac{10 \times 10}{2}$$

$$A_3 = A_4 = \frac{\pi 10^2}{2^2} - 10 \times 5$$

$$A_3 = A_4 = (25\pi - 50)\ cm^2\,,$$

donde segue que

$$A_2 = A_3 + A_4$$

$$A_2 = 2 \times (25\pi - 50)$$

$$\boxed{A_2 = (50\pi - 100)\ cm^2}.$$

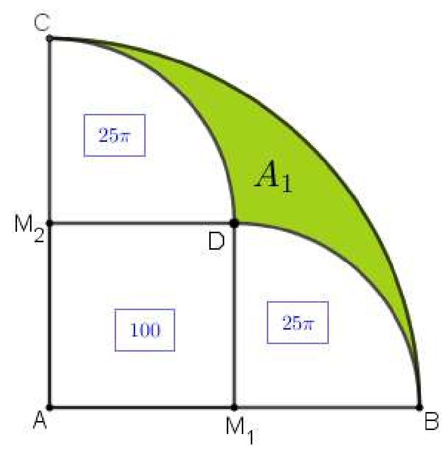
- Para calcularmos A_1, basta observar que essa área é a área de $\frac{1}{4}$ do círculo de raio $\overline{AB}$ menos três áreas: $\frac{1}{4}$ da área do círculo de raio $\overline{AM_1}$; $\frac{1}{4}$ da área do círculo de raio $\overline{AM_2}$ e a área do quadrado AM_1DM_2, conforme ilustrado na figura ao lado.

  Dessa forma, temos que:

$$A_1 = \frac{1}{4}\pi\, 20^2 - \frac{1}{4}\pi\, 10^2 - \frac{1}{4}\pi\, 10^2 - 10^2$$

$$A_1 = 100\pi - 25\pi - 25\pi - 100$$

$$\boxed{A_1 = (50\pi - 100)\ cm^2}.$$



Pronto, já podemos finalizar a nossa primeira solução e determinar a área A:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = (50\pi - 100) + (50\pi - 100)$$

$$A = (100\pi - 200)\ cm^2.$$

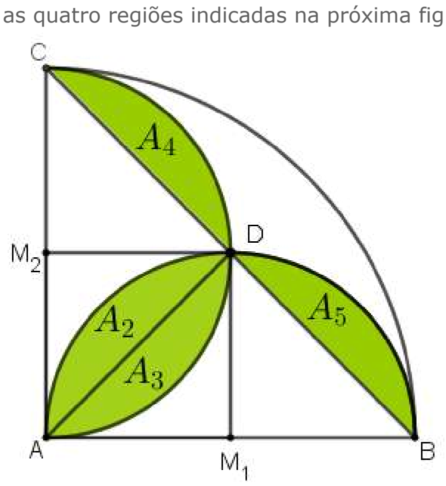
Assim, a área da região colorida de verde mostrada na figura é $\boxed{(100\pi - 200)\ cm^2}$, ou seja, aproximadamente $\boxed{114\, cm^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

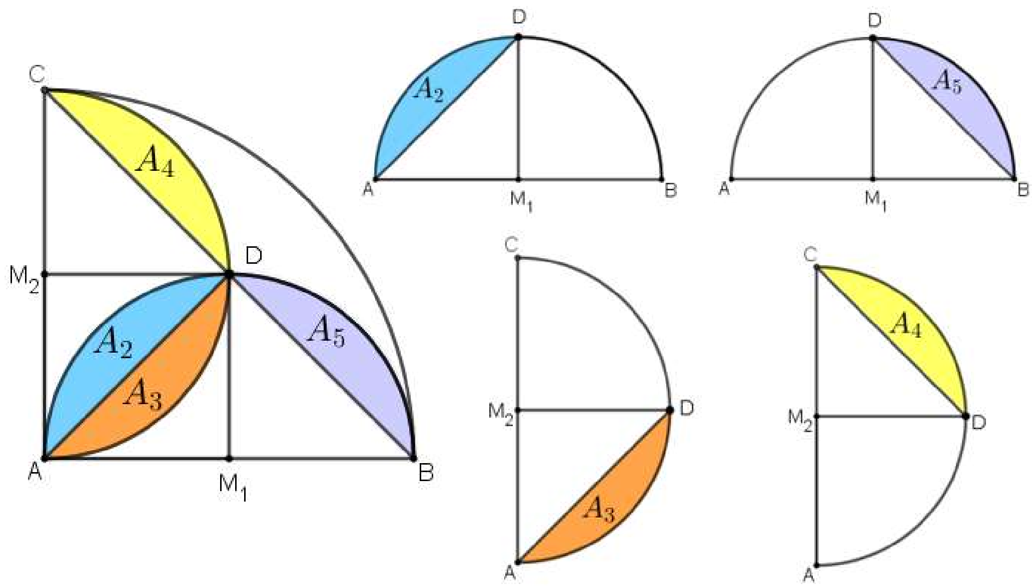
Nesta segunda solução, também construiremos o quadrado AM_1DM_2, a partir dos pontos médios M_1 e M_2 dos diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

Construído o quadrado, consideraremos as quatro regiões indicadas na próxima figura.

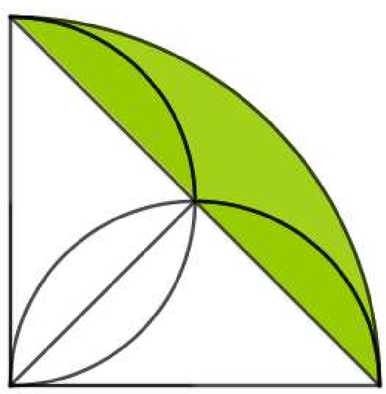


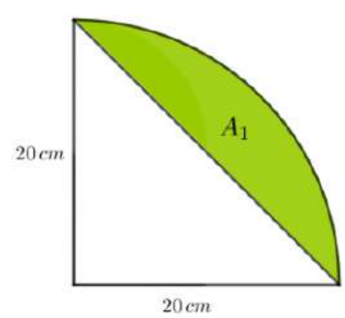
Observando apenas os semicírculos de diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, podemos perceber que essas quatro regiões são geometricamente equivalentes, ou seja, têm a mesma área:

- A_2 é a diferença entre a metade da área do semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$ e a área do triângulo AM_1D;
- A_3 é a diferença entre a metade da área do semicírculo de diâmetro $\overline{AC}$ e a área do triângulo AM_2D.
- A_4 é a diferença entre a metade da área do semicírculo de diâmetro $\overline{AC}$ e a área do triângulo CM_2D;
- A_5 é a diferença entre a metade da área do semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$ e a área do triângulo BM_1D.



Dessa forma, a área verde da figura original é igual a área verde da figura abaixo, à qual denominaremos A_1.





E observe como é simples calcular A_1, já que essa área é a diferença entre a área relativa a $\frac{1}{4}$ de um círculo de raio 20 e a área de um triângulo retângulo com catetos 20.
Veja:

$$A_1 = \frac{1}{4}\pi\, 20^2 - \frac{20 \times 20}{2}$$

$$A_1 = 100\pi - 200.$$

Assim, a área da região colorida de verde mostrada na figura é $\boxed{(100\pi - 200)\ cm^2}$, ou seja, aproximadamente $\boxed{114\,cm^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.