.Problema para ajudar na escola: Uma soma de quadrados

Problema

(A partir do 7º ano do E. F.)

Determinar de quantas maneiras podemos escrever 2003 como soma dos quadrados de dois números naturais não nulos.

Ajuda

Em várias situações é possível determinarmos a paridade de expressões envolvendo números naturais, a partir da paridade desses números, sem sequer calcular as expressões.

Particularmente, as tabelinhas abaixo ilustram situações de paridade que irão aparecer na solução deste problema:

- A soma de dois números naturais de mesma paridade é par.
- A soma de dois números naturais de paridade oposta é ímpar.
- O produto de dois números naturais só será ímpar se os dois números forem ímpares.

+	*par*	*ímpar*
par	*par*	*ímpar*
ímpar	*ímpar*	*par*

x	*par*	*ímpar*
par	*par*	*par*
ímpar	*par*	*ímpar*

(Se precisar, visite **esta Sala**.)

Solução 1

Sejam x e y números naturais não nulos que satisfaçam as condições do problema. Assim, $x^2+y^2=2003$.

- Como 2003 é um número ímpar, então as propriedades elencadas na **Ajuda** apontam que x^2 e y^2 têm paridades opostas (veja a tabelinha da esquerda).
- Mas a tabelinha da direita mostra que o quadrado de um número mantém a sua paridade; assim, x e y têm paridades contrárias.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que x seja um número par e y seja um número ímpar. Dessa forma, existem números naturais m e n, com $n \neq 0$, tais que $\boxed{x = 2n}$ e $\boxed{y = 2m+1}$, donde segue que:

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 = 2003\\
&(2n)^2 + (2m+1)^2 = 2003\\
&4n^2 + 4m^2 + 4m + 1 = 2003\\
&4\left(n^2 + m^2 + m\right) + 1 = 2003\\
&4\left(n^2 + m^2 + m\right) = 2002. \qquad (i)
\end{aligned}$$

Perceba que se $k = n^2 + m^2 + m$, então de (i) segue que $2002 = 4k$, com $k \in \mathbb{N}$ e com isso concluiríamos que 2002 é um múltiplo de 4. Mas

$$\begin{array}{r|l} 2002 & 4 \\ \hline 2 & 500 \end{array}$$

o que mostra que 2002 NÃO é um múltiplo de 4.

Portanto, não podemos supor que existam números naturais não nulos cuja soma dos quadrados seja igual a 2003, pois isso acarreta um erro.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Se você ainda não aprendeu a lidar com a álgebra, não faz mal, veja a segunda solução.

Solução 2

Os esquemas multiplicativos abaixo nos mostram que o quadrado de um número natural não nulo termina necessariamente em $0, 1, 4, 5, 6$ ou 9.

$$\begin{array}{rccc} & a & \cdots & 1\\ \times & a & \cdots & 1\\ \hline & b & \cdots & \boxed{1}\end{array}
\quad
\begin{array}{rccc} & a & \cdots & 2\\ \times & a & \cdots & 2\\ \hline & c & \cdots & \boxed{4}\end{array}
\quad
\begin{array}{rccc} & a & \cdots & 3\\ \times & a & \cdots & 3\\ \hline & d & \cdots & \boxed{9}\end{array}
\quad
\begin{array}{rccc} & & \underline{1} & \\ & a & \cdots & 4\\ \times & a & \cdots & 4\\ \hline & e & \cdots & \boxed{6}\end{array}
\quad
\begin{array}{rccc} & & \underline{2} & \\ & a & \cdots & 5\\ \times & a & \cdots & 5\\ \hline & f & \cdots & \boxed{5}\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} & & \underline{3} & \\ & a & \cdots & 6\\ \times & a & \cdots & 6\\ \hline & g & \cdots & \boxed{6}\end{array}
\quad
\begin{array}{rccc} & & \underline{4} & \\ & a & \cdots & 7\\ \times & a & \cdots & 7\\ \hline & h & \cdots & \boxed{9}\end{array}
\quad
\begin{array}{rccc} & & \underline{6} & \\ & a & \cdots & 8\\ \times & a & \cdots & 8\\ \hline & l & \cdots & \boxed{4}\end{array}
\quad
\begin{array}{rccc} & & \underline{8} & \\ & a & \cdots & 9\\ \times & a & \cdots & 9\\ \hline & r & \cdots & \boxed{1}\end{array}
\quad
\begin{array}{rccc} & a & \cdots & 0\\ \times & a & \cdots & 0\\ \hline & s & \cdots & \boxed{0}\end{array}$$

Dessa forma, para que a soma de dois quadrados seja 2003 ($x^2 + y^2 = 2003$), um dos quadrados deve terminar em 4 e o outro em 9.

Para que o quadrado de um número natural termine em 9, esse número deve terminar em 3 ou em 7, conforme mostram os esqueminhas acima; assim, podemos listar os quadrados terminados em 9 que são menores do que 2003, para verificar quais diferenças $2003 - x^2$ (que sabemos que terminam em 4) são quadrados perfeitos.

Vamos lá!

x	x^2	$2003 - x^2$	$2003 - x^2$ é quadrado perfeito?
3	9	1994	1994 não é quadrado perfeito, pois $\sqrt{1994} \notin \mathbb{N}$
7	49	1954	1954 não é quadrado perfeito, pois $\sqrt{1954} \notin \mathbb{N}$

13	169	1834	1834 não é quadrado perfeito, pois $\sqrt{1834} \notin \mathbb{N}$
17	289	1714	1714 não é quadrado perfeito, pois $\sqrt{1714} \notin \mathbb{N}$
23	529	1474	1474 não é quadrado perfeito, pois $\sqrt{1474} \notin \mathbb{N}$
27	729	1274	1274 não é quadrado perfeito, pois $\sqrt{1274} \notin \mathbb{N}$
33	1089	914	914 não é quadrado perfeito, pois $\sqrt{914} \notin \mathbb{N}$
37	1369	634	634 não é quadrado perfeito, pois $\sqrt{634} \notin \mathbb{N}$
43	1849	154	154 não é quadrado perfeito, pois $\sqrt{154} \notin \mathbb{N}$
$47^2 = 2209 > 2003$			

Assim, não existem números naturais não nulos x e y tais que $x^2 + y^2 = 2003.$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.