.Problema para ajudar na escola: Uma sequência numérica

Problema

(A partir do 8º ano do E. F.)

(**ONEM** – 2008) Foram escritos em uma folha de papel, em ordem crescente, os primeiros três mil números inteiros positivos que são múltiplos de 2 ou de 3, mas não múltiplos de ambos.
Nessa sequência, que número ocupa a posição 2018?

Ajuda

Algoritmo de Euclides ou Algoritmo da Divisão

Sejam a e b números naturais, com $b \neq 0$.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Ao dividirmos a por b encontraremos um quociente q e um resto r, naturais e únicos, tais que:

$$(1) \quad 0 \leq r < b \qquad (2) \; a = q\,b + r.$$

Solução

Vamos fazer algumas considerações, antes de resolvermos o problema propriamente dito.
Sem muito formalismo, ao dividirmos um número natural n por seis podemos encontrar resto 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

- Se n deixa resto 0, então n é múltiplo de 2 e de 3 simultaneamente.
- Se n deixa resto 1, então n não é múltiplo de 2 e nem 3.
- Se n deixa resto 2, então n é múltiplo de 2, mas não é múltiplo de 3.
- Se n deixa resto 3, então n é múltiplo de 3, mas não é múltiplo de 2.
- Se n deixa resto 4, então n é múltiplo de 2, mas não é múltiplo de 3.
- Se n deixa resto 5, então n não é múltiplo de 2 e nem 3.

Resto 0	Resto 1	Resto 2	Resto 3	Resto 4	Resto 5

Múltiplos de 2

Resto 0	Resto 1	Resto 2	Resto 3	Resto 4	Resto 5

Múltiplos de 3

Resto 0	Resto 1	Resto 2	Resto 3	Resto 4	Resto 5

Múltiplos ou só de 2 ou só de 3

Se você já consegue entender um pouco o formalismo da Matemática, veja que podemos escrever as informações acima da seguinte maneira:

Um número natural n ao ser dividido por seis deixa resto 0, 1, 2, 3, 4 ou 5. Assim, n pode assumir uma dessas formas:

$\boxed{6k}$ $\boxed{6k+1}$ $\boxed{6k+2}$ $\boxed{6k+3}$ $\boxed{6k+4}$ $\boxed{6k+5}$, com $k \in \mathbb{N}$.

- Se n deixa resto 0, então $n = 6k = 2(3k) = 3(2k)$. Logo, é múltiplo de 2 e de 3 simultaneamente, já que tanto $3k$ como $2k$ são números naturais.
- Se n deixa resto 1, então $n = 6k + 1$. Perceba que n não pode ser escrito na forma $n = 2t$ e nem na forma $n = 3t$, com t sendo um número natural; assim, n não é múltiplo de 2 e nem 3.
- Se n deixa resto 2, então $n = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ e, portanto, é múltiplo de 2. Mas note que não podemos escrever n na forma $n = 3t$ com t sendo um número natural; assim, embora seja múltiplo de 2, n não é múltiplo de 3.
- Se n deixa resto 3, então $n = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ e, assim, é múltiplo de 3. Mas veja que não é possível escrever n na forma $n = 2t$ com t sendo um número natural. Portanto n não é múltiplo de 2, embora seja múltiplo de 3.
- Se n deixa resto 4, então $n = 6k + 4 = 2(3k + 2)$ e, dessa forma, n é múltiplo de 2. Mas também não podemos escrever n na forma $n = 3t$ com t sendo um número natural, o que mostra que, embora seja múltiplo de 2, n não é múltiplo de 3.
- Se n deixa resto 5, então $n = 6k + 5$. Veja que n não pode ser escrito na forma $n = 2t$ e nem na forma $n = 3t$, com t sendo um número natural; assim, n não é múltiplo de 2 e nem 3.

$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$

Múltiplos de 2

$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$

Múltiplos de 3

$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$

Múltiplos ou só de 2 ou só de 3

De uma maneira ou de outra, a informação que nos ajudará a resolver o problema é esta:

- Na sequência aparecem números que, quando divididos por seis, deixam resto 2, 3 ou 4. Isso significa que foram escritos números da forma $6k + 2$, $6k + 3$ ou $6k + 4$, com k um número natural. Percebam que:
  - para $k = 0$, aparecem os números 2, 3, 4;
  - para $k = 1$, aparecem os números 8, 9, 10;
  - para $k = 2$, aparecem os números 14, 15, 16;
  - e assim sucessivamente.

Dessa forma, foram escritos consecutivamente, de 3 em 3, números naturais da forma $6k+2$, $6k+3$ ou $6k+4$. Assim, devemos agrupar as 2018 posições de três em três para determinarmos se o número que ocupará a posição 2018 será o primeiro, o segundo ou o terceiro no seu respectivo grupo. Observe que

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 672 \end{array}$$

portanto, devemos formar 672 grupos de três números e o número que ocupará a posição 2018 será o segundo número do grupo seguinte.

Fazendo $k=0, 1, 2, \cdots, 671$ conseguimos definir os 672 grupos cujas três posições são ocupadas, respectivamente, pelos números $6k+2$, $6k+3$ e $6k+4$. Como os números do grupo seguinte serão definidos por $k=672$, o número que ocupará a posição 2018 será da forma $6k+3$, para $k=672$. Esse número será $\boxed{6\times 672+3=4035}$.

O esquema abaixo poderá ajudar na visualização da distribuição dos números.

Grupo 1	2	3	4	$\boxed{k=0}$
	Posição 1	Posição 2	Posição 3	
Grupo 2	8	9	10	$\boxed{k=1}$
	Posição 4	Posição 5	Posição 6	
Grupo 3	14	15	16	$\boxed{k=2}$
	Posição 7	Posição 8	Posição 9	
		$\vdots$		
Grupo k+1	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$\boxed{k}$
	Posição $3k+1$	Posição $3k+2$	Posição $3k+3$	
		$\vdots$		
Grupo 672	4028	4029	4030	$\boxed{k=671}$
	Posição 2014	Posição 2015	Posição 2016	
Grupo 673	4034	$\boxed{4035}$	4036	$\boxed{k=672}$
	Posição 2017	Posição 2018	Posição 2019	

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ❤ por Temas Graphene.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Somando novos talentos para o Brasil

Apoio
CAPES CNPq SBM

Realização
impa
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL