

.Problema para ajudar na escola: Uma sequência natural



Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

(Adaptado da **Olimpiada Matemática Española**-2000) Considere a sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019}, \dots)$ de números naturais assim definida:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + a_n^2, \text{ para } n > 1 \end{cases} .$$

Determine os dois últimos algarismos do termo a_{2019} dessa sequência.

Solução

Vamos inicialmente calcular os primeiros termos da sequência definida no problema:

- O primeiro termo já está explicitamente definido: $a_1 = 3$.

A partir da fórmula

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2, \quad (i)$$

vamos calcular alguns dos termos seguintes:

- Substituindo $n = 1$ em (i), obtemos

$$a_{1+1} = a_1 + a_1^2$$

$$a_2 = 3 + 3^2$$

$$a_2 = 12.$$

- Substituindo $n = 2$ em (i), obtemos

$$a_{2+1} = a_2 + a_2^2$$

$$a_3 = 12 + 12^2$$

$$a_3 = 156.$$

- Substituindo $n = 3$ em (i), obtemos

$$a_{3+1} = a_3 + a_3^2$$

$$a_4 = 156 + 156^2$$

$$\boxed{a_4 = 24492}.$$

- Substituindo $n = 4$ em (i), obtemos

$$a_{4+1} = a_4 + a_4^2$$

$$a_5 = 24492 + 24492^2$$

$$\boxed{a_5 = 599882556}.$$

Com esses cálculos iniciais, já podemos observar que:

- $a_2 = 3 + 3^2 = 3 \cdot (1 + 3) = \boxed{3 \cdot 4}$

- $a_3 = 12 + 12^2 = 12 \cdot (1 + 12) = \boxed{12 \cdot 13}$

- $a_4 = 156 + 156^2 = 156 \cdot (1 + 156) = \boxed{156 \cdot 157}$

- $a_5 = 24492 + 24492^2 = 24492 \cdot (1 + 24492) = \boxed{24492 \cdot 24493}$

ou seja,

- $\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot (a_n + 1)}$.

E essa observação procede, já que

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + a_n^2 = a_n(1 + a_n) = a_n \cdot (a_n + 1)}. \quad (ii)$$

Analisando os primeiros resultados

- $a_2 = 12$

- $a_3 = 156$

- $a_4 = \boxed{156 \cdot 157} = 24492$

- $a_5 = 599882556$

parece que, a partir do terceiro termo, está surgindo um padrão com relação aos dois últimos algarismos dos termos da sequência: **se um termo da sequência termina em 56, o termo seguinte termina em 92.**

Será que é isso mesmo?

– Vamos investigar!

(1) Suponhamos que um termo a_m termine em 56. Assim, a_m é da forma $a_m = 100k + 56$, para algum número natural k .

Com isso, por (ii), teremos que:

$$a_{m+1} = a_m \cdot (a_m + 1)$$

$$a_{m+1} = (100k + 56) \cdot ((100k + 56) + 1)$$

$$a_{m+1} = (100k + 56) \cdot (100k + 57)$$

$$a_{m+1} = 10000k^2 + 5700k + 5600k + 3192$$

$$a_{m+1} = 100(100k^2 + 57k + 56k) + (3100 + 92)$$

$$a_{m+1} = 100(100k^2 + 57k + 56k + 31) + 92.$$

Se $t = 100k^2 + 57k + 56k + 31$, então

$$a_{m+1} = 100t + 92, \text{ com } t \in \mathbb{N},$$

ou seja a_{m+1} termina de fato em 92.

(2) Suponhamos que um termo a_m termine em 92. Assim, a_m é da forma $a_m = 100k + 92$, para algum número natural k .

Com isso, por (ii), teremos que:

$$a_{m+1} = a_m \cdot (a_m + 1)$$

$$a_{m+1} = (100k + 92) \cdot ((100k + 92) + 1)$$

$$a_{m+1} = (100k + 92) \cdot (100k + 93)$$

$$a_{m+1} = 10000k^2 + 9300k + 9200k + 8556$$

$$a_{m+1} = 100(100k^2 + 93k + 92k) + (8500 + 56)$$

$$a_{m+1} = 100(100k^2 + 93k + 92k + 85) + 56.$$

Se $t = 100k^2 + 93k + 92k + 85$, então

$$a_{m+1} = 100t + 56, \text{ com } t \in \mathbb{N},$$

ou seja a_{m+1} termina de fato em 56.

Podemos ir além...

Observe que, como

$$a_3 = 156, a_4 = 24492, a_5 = 599882556,$$

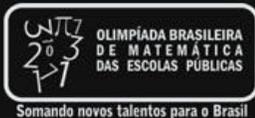
por (1) e (2), podemos concluir que

- termos da sequência com índices ímpares terminam em 56
- termos da sequência com índices pares terminam em 92.

Portanto, como 2019 é ímpar, os dois últimos algarismos do termo a_{2019} são 56.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

