.Problema para ajudar na escola: Uma sequência natural

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

(Adaptado da **Olimpiada Matemática Española**-2000) Considere a sequência $\left(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2019}, \cdots\right)$ de números naturais assim definida:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + a_n^2, \text{ para } n > 1 \end{cases}.$$

Determine os dois últimos algarismos do termo a_{2019} dessa sequência.

Solução

Vamos inicialmente calcular os primeiros termos da sequência definida no problema:

- O primeiro termo já está explicitamente definido: $\boxed{a_1 = 3}$.

A partir da fórmula

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2 \ , \qquad\qquad (i)$$

vamos calcular alguns dos termos seguintes:

- Substituindo $n = 1$ em (i), obtemos
$$a_{1+1} = a_1 + a_1^2$$
$$a_2 = 3 + 3^2$$
$$\boxed{a_2 = 12}.$$
- Substituindo $n = 2$ em (i), obtemos
$$a_{2+1} = a_2 + a_2^2$$
$$a_3 = 12 + 12^2$$
$$\boxed{a_3 = 156}.$$
- Substituindo $n = 3$ em (i), obtemos
$$a_{3+1} = a_3 + a_3^2$$

$a_4 = 156 + 156^2$
$\boxed{a_4 = 24\,492}$.

- Substituindo $n = 4$ em (i), obtemos

$a_{4+1} = a_4 + a_4^2$
$a_5 = 24492 + 24492^2$
$\boxed{a_5 = 599\,882\,556}$.

Com esses cálculos iniciais, já podemos observar que:

- $a_2 = 3 + 3^2 = 3 \cdot (1+3) = \boxed{3 \cdot 4}$
- $a_3 = 12 + 12^2 = 12 \cdot (1+12) = \boxed{12 \cdot 13}$
- $a_4 = 156 + 156^2 = 156 \cdot (1+156) = \boxed{156 \cdot 157}$
- $a_5 = 24492 + 24492^2 = 24492 \cdot (1+24492) = \boxed{24492 \cdot 24493}$

ou seja,

- $\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot (a_n + 1)}$.

E essa observação procede, já que

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + a_n^2 = a_n\,(1 + a_n) = a_n \cdot (a_n + 1)}. \qquad (ii)$$

Analisando os primeiros resultados

- $a_2 = 12$
- $a_3 = 156$
- $a_4 = \boxed{156 \cdot 157} = 24\,492$
- $a_5 = 599\,882\,556$

parece que, a partir do terceiro termo, está surgindo um padrão com relação aos dois últimos algarismos dos termos da sequência: **se um termo da sequência termina em 56, o termo seguinte termina em 92.**

Será que é isso mesmo?

– Vamos investigar!

(1) Suponhamos que um termo a_m termine em 56. Assim, a_m é da forma $a_m = 100k + 56$, para algum número natural k.

Com isso, por (ii), teremos que:

$a_{m+1} = a_m \cdot (a_m + 1)$
$a_{m+1} = (100k + 56) \cdot ((100k + 56) + 1)$
$a_{m+1} = (100k + 56) \cdot (100k + 57)$
$a_{m+1} = 10000k^2 + 5700k + 5600k + 3192$
$a_{m+1} = 100\left(100k^2 + 57k + 56k\right) + (3100 + 92)$
$a_{m+1} = 100\left(100k^2 + 57k + 56k + 31\right) + 92$.

Se $t = 100k^2 + 57k + 56k + 31$, então

$a_{m+1} = 100t + 92$, com $t \in \mathbb{N}$,

ou seja a_{m+1} termina de fato em 92.

(2) Suponhamos que um termo a_m termine em 92. Assim, a_m é da forma $a_m = 100k + 92$, para algum número natural k.

Com isso, por (ii), teremos que:

$a_{m+1} = a_m \cdot (a_m + 1)$
$a_{m+1} = (100k + 92) \cdot ((100k + 92) + 1)$

$$a_{m+1} = (100k+92)\cdot(100k+93)$$
$$a_{m+1} = 10000k^2 + 9300k + 9200k + 8556$$
$$a_{m+1} = 100\left(100k^2 + 93k + 92k\right) + (8500 + 56)$$
$$a_{m+1} = 100\left(100k^2 + 93k + 92k + 85\right) + 56.$$

Se $t = 100k^2 + 93k + 92k + 85$, então

$$a_{m+1} = 100t + 56\text{, com } t \in \mathbb{N},$$

ou seja a_{m+1} termina de fato em 56.

Podemos ir além...

Observe que, como

$$a_3 = 156,\ a_4 = 24\,492,\ a_5 = 599\,882\,556,$$

por (1) e (2), podemos concluir que

- termos da sequência com índices ímpares terminam em 56
- termos da sequência com índices pares terminam em 92.

Portanto, como 2019 é ímpar, os dois últimos algarismos do termo a_{2019} são 56.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.