.Problema para ajudar na escola: Uma relação entre áreas

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

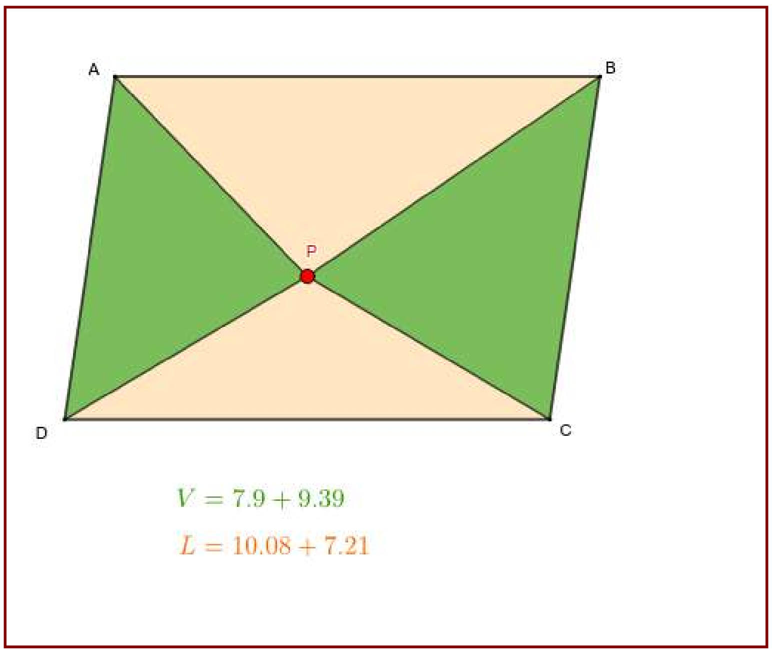
(Adaptado da **Junior Mathematical Olympiad – 2014**) Um ponto P tomado no interior de um paralelogramo $ABCD$ define os triângulos APB, BPC, CPD e DPA.
Que relação existe entre as áreas desses quatro triângulos? Justifique sua resposta.

Uma ajuda

O *applet* abaixo pode ajudar...

Para utilizá-lo, basta movimentar o ponto P.

Observe que V denota a soma das áreas dos triângulos coloridos de verde e L denota a soma das áreas dos triângulos coloridos com a cor laranja.



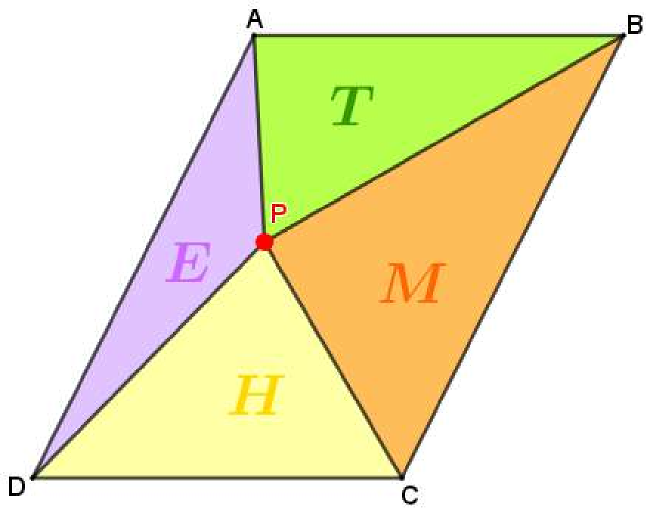
OBMEP_srg, criado com o GeoGebra

Um lembrete

Cada diagonal de um paralelogramo divide-o em dois triângulos congruentes, ou seja, em dois triângulos com a mesma área.

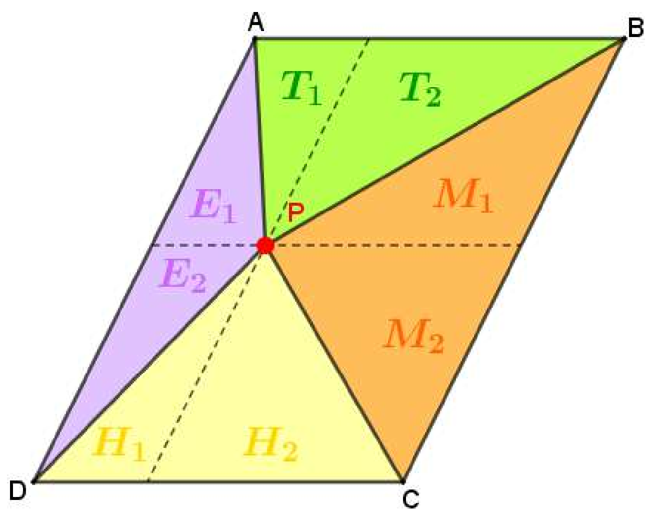
Solução

Tome um ponto P no interior de um paralelogramo $ABCD$, conforme ilustra a figura abaixo. Denominaremos as áreas dos triângulos APB, BPC, CPD e DPA por T, M, H e E, respectivamente.



Utilizando o *applet*, podemos perceber que $\boxed{T+H=E+M}$, e é essa relação que vamos provar.

Com efeito, ao traçarmos dois segmentos passando por P e paralelos, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ do paralelogramo $ABCD$, obtemos quatro paralelogramos que decompõem cada um dos triângulos APB, BPC, CPD e DPA em dois triângulos, cujas áreas denotaremos por T_1, T_2, M_1, M_2, H_1, H_2, E_1 e E_2, conforme ilustra a próxima figura.



Perceba que os segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ e $\overline{DP}$ são diagonais dos quatro paralelogramos obtidos; assim, pelo **Lembrete**, temos que:

- $E_1 = T_1$;
- $T_2 = M_1$;
- $M_2 = H_2$;
- $H_1 = E_2$.

Dessa forma:

$$\begin{aligned} T+H &= (T_1+T_2)+(H_1+H_2) \\ &= (E_1+M_1)+(E_2+M_2) \\ &= (E_1+E_2)+(M_1+M_2) \\ &= E+M \end{aligned}$$

Portanto, de fato, $\boxed{T+H=E+M}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.