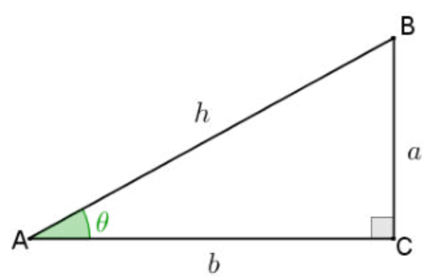
.Problema para ajudar na escola: Uma medida de ângulo

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(**XXVII OPM** – 2009) Nos lados CD e BC de um quadrado $ABCD$ são marcados os pontos N e M, respectivamente.
Sabendo que o perímetro do triângulo MCN é igual ao dobro do comprimento do lado do quadrado, determine a medida do ângulo $M\hat{A}N$.

AJUDA para a Solução 1



Definição: Seja ACB um triângulo retângulo com catetos e hipotenusa com comprimentos $a,\ b,\ h$, respectivamente. Seja θ a medida em graus de um dos ângulos agudos desse triângulo, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.
Chamamos de *tangente de* θ, e denotamos por $tg\,\theta$, a razão entre os comprimentos do cateto oposto e do cateto adjacente a θ: $\boxed{tg\,\theta = \dfrac{a}{b}}$.

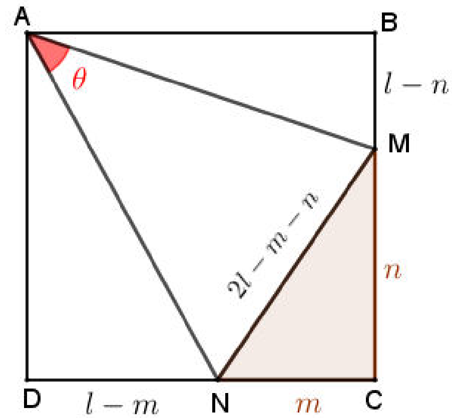
Propriedade: Dados dois ângulos a e b, com $a, b, a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$, tem-se $\boxed{\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}}$.

Solução 1

Sejam l o comprimento do lado do quadrado, n o comprimento do segmento CM e m o comprimento do segmento CN, conforme indicado na figura abaixo. Na figura, consideramos também que θ é a medida em graus do ângulo $M\hat{A}N$.

Sabemos que o perímetro do triângulo MCN é igual ao dobro do comprimento do lado do quadrado. Assim, se x for o comprimento do segmento MN, segue que:

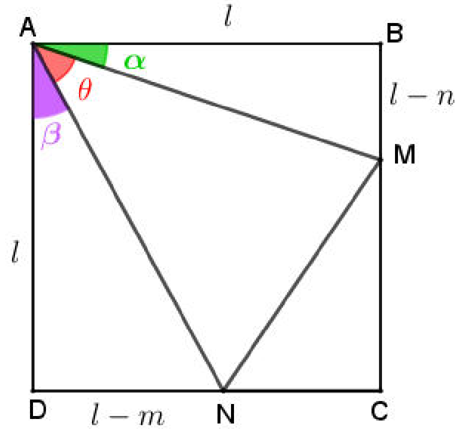
$$x + m + n = 2l$$
$$\boxed{x = 2l - m - n}.$$



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MCN, temos que:

$$m^2 + n^2 = (2l - m - n)^2$$
$$m^2 + n^2 = 4l^2 - 4lm - 4ln + 2mn + m^2 + n^2$$
$$\cancel{m^2} + \cancel{n^2} = 4l^2 - 4lm - 4ln + 2mn + \cancel{m^2} + \cancel{n^2}$$
$$0 = 4l^2 - 4lm - 4ln + 2mn$$
$$2l^2 - 2lm - 2ln + mn = 0. \qquad (i)$$

Vamos agora observar os triângulos ADN e ABM para obter a tangente dos ângulos agudos $D\hat{A}N$ e $M\hat{A}B$, cujas medidas em graus denotaremos por β e α, conforme indica a figura a seguir.



Perceba, então, que:

$$tg\,\alpha = \frac{l-n}{l} \qquad \text{e} \qquad tg\,\beta = \frac{l-m}{l};$$

logo, da fórmula da tangente da soma, segue que:

$$tg\,(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

$$tg\,(\alpha+\beta) = \frac{\frac{l-n}{l} + \frac{l-m}{l}}{1 - \frac{l-n}{l} \cdot \frac{l-m}{l}} = \frac{\frac{2l-m-n}{l}}{\frac{l^2-(l-m)\cdot(l-n)}{l^2}}$$

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{(2l - m - n) \cdot l}{l^2 - (l - m) \cdot (l - n)} = \frac{2l^2 - lm - ln}{l^2 - (l^2 - ln - lm + mn)}$$

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{2l^2 - lm - ln}{ln + lm - mn}\ .$$

De (i), temos que $2l^2 = 2lm + 2ln - mn$, logo:

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{(2lm + 2ln - mn) - lm - ln}{ln + lm - mn} = \frac{ln + lm - mn}{ln + lm - mn}\ .$$

$$tg\ (\alpha + \beta) = 1\ .$$

Como o ângulo cuja medida é $\alpha + \beta$ é um ângulo agudo, segue que $\boxed{\alpha + \beta = 45^\circ}$.
Mas $\beta + \theta + \alpha = 90^\circ$, logo:

$$(\alpha + \beta) + \theta = 90^\circ$$
$$45^\circ + \theta = 90^\circ$$
$$\theta = 45^\circ.$$

Portanto, a medida do ângulo $M\hat{A}N$ é $\boxed{45^\circ}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Se você ainda não aprendeu trigonometria, não faz mal.
Veja a Solução 2!

Lembretes para a Solução 2

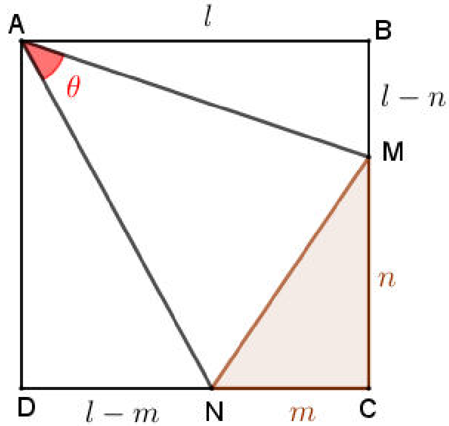
(1) Caso de congruência L.A.L. (lado – ângulo – lado): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo por eles definido, então estes triângulos são congruentes (geometricamente iguais).

(2) Caso de congruência L.L.L. (lado – lado- lado): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então estes triângulos são congruentes.

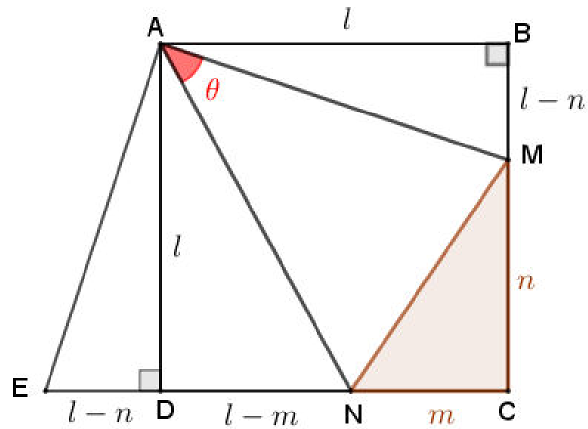
Se você não se lembra dos casos de congruência entre triângulos, clique **AQUI**.

Solução 2

Sejam l o comprimento do lado do quadrado, n o comprimento do segmento CM e m o comprimento do segmento CN, conforme indicado na figura abaixo. Na figura, consideramos também que θ é a medida em graus do ângulo $M\hat{A}N$.



Faremos agora uma construção: seja E o ponto da reta CD tal que D esteja entre os pontos C e E e que o comprimento do segmento ED seja $l-n$.



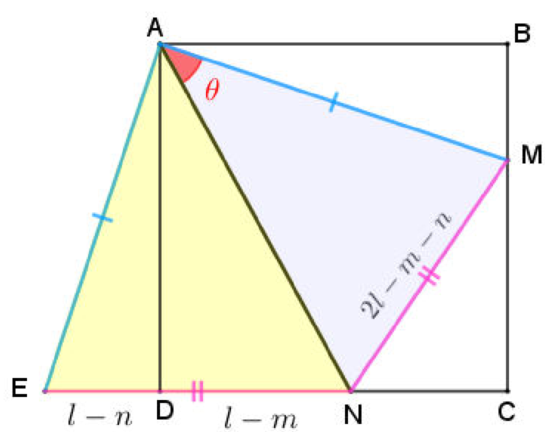
Observe que, pelo **Lembrete 1**, os triângulos ADE e ABM são congruentes; logo, em particular, os segmentos AE e AM têm a mesma medida.

Por outro lado, sabemos que o perímetro do triângulo MCN é igual ao dobro do comprimento do lado do quadrado. Assim, se x for o comprimento do segmento MN, segue que:

$$x+m+n=2l$$

$$\boxed{x=2l-m-n}.$$

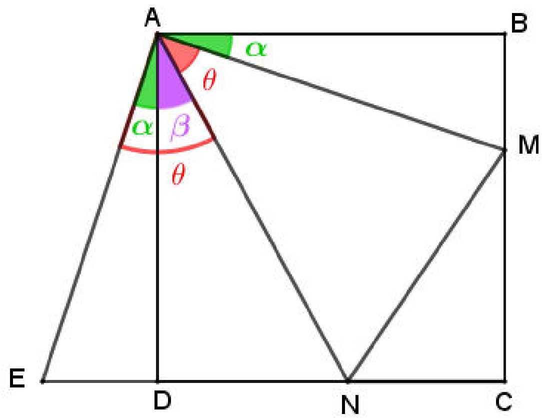
Na figura a seguir, vamos passar a limpo algumas informações que nos interessam para a conclusão da solução.



Note que os segmentos EN e NM têm o mesmo comprimento; assim, pelo **Lembrete 2**, os triângulos AEN e AMN são congruentes.

Vamos fazer uma última figura mostrando algumas igualdades entre medidas de ângulos que podemos obter a partir de congruências dos triângulos que aparecem na figura:

- da congruência dos triângulos ADE e ABM, concluímos que os ângulos $E\hat{A}D$ e $M\hat{A}B$ têm a mesma medida, denotada por α;
- da congruência dos triângulos AEN e ANM, concluímos que os ângulos $E\hat{A}N$ e $N\hat{A}M$ têm a mesma medida, denotada por θ.



Finalmente, veja que:

$$
\begin{aligned}
90^\circ &= \beta + \theta + \alpha \\
90^\circ &= (\alpha + \beta) + \theta \\
90^\circ &= \theta + \theta \\
90^\circ &= 2\theta \\
\theta &= \frac{90^\circ}{2} \\
\theta &= 45^\circ.
\end{aligned}
$$

Portanto, a medida do ângulo $M\hat{A}N$ é $\boxed{45^\circ}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.