

.Problema para ajudar na escola: Uma função



Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Seja f uma função real definida para qualquer número real diferente de 0 e 1 e que satisfaz as seguintes condições:

- $f(1-x) = \frac{1}{f(x)}$
- $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(f(x))}$
- $f(f(f(x))) = x$.

- (a) Determine a tal que $f(a) = 0$.
(b) Determine b tal que $f(b) = 1$.
(c) Determine $f(2)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Solução

Seja f uma função real definida para qualquer número real diferente de 0 e 1 e que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $f(1-x) = \frac{1}{f(x)}$
(ii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(f(x))}$
(iii) $f(f(f(x))) = x$.

- (a) Para resolver este item, observe que se m e n são números reais, então

$$\frac{m}{n} = 0 \iff m = 0 \text{ e } n \neq 0 ;$$

dessa forma, uma das condições necessárias para que um número escrito na forma $\frac{m}{n}$ seja 0 é que m seja 0.

Portanto, como $1 \neq 0$, o número $\frac{1}{f(x)} \neq 0$, para todo número real x para o qual a função está definida.

Dessa forma, **não existe a tal que $f(a) = 0$** .

Uma outra forma de resolver este item é observar que, se existisse um número real a tal que $f(a) = 0$, pela condição **(iii)**, teríamos que:

$$f(f(f(a))) = a$$

$$f(f(0)) = a.$$

e, portanto, para que esse número a existisse, a função f deveria estar definida para $x = 0$, o que não ocorre.

(b) Seja b um número real tal que $f(b) = 1$. Assim, pela condição **(iii)**, segue que:

$$f(f(f(b))) = b$$

$$f(f(1)) = b.$$

Com isso, observamos que para que o número b exista, a função deve estar definida para $x = 1$, o que contraria uma das hipóteses de definição da função f .

Portanto, **não existe b tal que $f(b) = 1$** .

(c) Faremos o cálculo de cada imagem separadamente.

- Fazendo $x = \frac{1}{2}$ em **(i)**, segue que:

$$f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 1$$

$$\sqrt{\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2} = \sqrt{1}$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \pm 1.$$

Por esses cálculos temos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ou $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$; mas, pelo item **(b)**, descartamos a possibilidade $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Assim, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

- Agora, fazendo $x = 2$ em **(ii)**, obtemos que:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f(f(2))}.$$

$$-1 = \frac{1}{f(f(2))}$$

$$f(f(2)) = -1.$$

Como de **(iii)** segue que $f(f(f(2))) = 2$, concluímos que $f(-1) = 2$.

- Finalmente, fazendo $x = 2$ em (i), obtemos que:

$$f(1 - 2) = \frac{1}{f(2)}$$

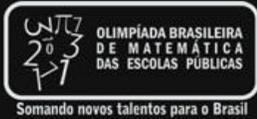
$$f(-1) = \frac{1}{f(2)}$$

$$2 = \frac{1}{f(2)}$$

$$\boxed{f(2) = \frac{1}{2}}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

