.Problema para ajudar na escola: Uma função

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Seja f uma função real definida para qualquer número real diferente de 0 e 1 e que satisfaz as seguintes condições:

- $f(1-x)=\dfrac{1}{f(x)}$
- $f(\frac{1}{x})=\dfrac{1}{f(f(x))}$
- $f(f(f(x)))=x$.

(a) Determine a tal que $f(a)=0$.
(b) Determine b tal que $f(b)=1$.
(c) Determine $f(2),\ f(-1),\ f(\frac{1}{2})$.

Solução

Seja f uma função real definida para qualquer número real diferente de 0 e 1 e que satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(1-x)=\dfrac{1}{f(x)}$
(ii) $f(\frac{1}{x})=\dfrac{1}{f(f(x))}$
(iii) $f(f(f(x)))=x$.

(a) Para resolver este item, observe que se m e n são números reais, então

$$\frac{m}{n}=0 \iff m=0 \text{ e } n\neq 0\ ;$$

dessa forma, uma das condições necessárias para que um número escrito na forma $\dfrac{m}{n}$ seja 0 é que m seja 0.

Portanto, como $1 \neq 0$, o número $\dfrac{1}{f(x)} \neq 0$, para todo número real x para o qual a função está definida.

Dessa forma, **não existe a tal que** $f(a) = 0$.

Uma outra forma de resolver este item é observar que, se existisse um número real a tal que $f(a) = 0$, pela condição (iii), teríamos que:

$$f(f(f(a))) = a$$
$$f(f(0)) = a.$$

e, portanto, para que esse número a existisse, a função f deveria estar definida para $x = 0$, o que não ocorre.

(b) Seja b um número real tal que $f(b) = 1$. Assim, pela condição (iii), segue que:

$$f(f(f(b))) = b$$
$$f(f(1)) = b.$$

Com isso, observamos que para que o número b exista, a função deve estar definida para $x = 1$, o que contraria uma das hipóteses de definição da função f.

Portanto, **não existe b tal que** $f(b) = 1$.

(c) Faremos o cálculo de cada imagem separadamente.

- Fazendo $x = \dfrac{1}{2}$ em (i), segue que:

$$f\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$\left[f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 = 1$$
$$\sqrt{\left[f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2} = \sqrt{1}$$
$$\left|f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = 1$$
$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pm 1.$$

  Por esses cálculos temos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ou $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$; mas, pelo item **(b)**, descartamos a possibilidade $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

  Assim, $\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = -1}$.

- Agora, fazendo $x = 2$ em (ii), obtemos que:

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{f(f(2))}.$$
$$-1 = \frac{1}{f(f(2))}$$
$$\boxed{f(f(2)) = -1}\ .$$

  Como de (iii) segue que $f(f(f(2))) = 2$, concluímos que $\boxed{f(-1) = 2}$.

- Finalmente, fazendo $x = 2$ em (i), obtemos que:

$$f(1-2) = \frac{1}{f(2)}$$
$$f(-1) = \frac{1}{f(2)}$$
$$2 = \frac{1}{f(2)}$$
$$\boxed{f(2) = \frac{1}{2}}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ❤ por Temas Graphene.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Somando novos talentos para o Brasil

Apoio

CAPES CNPq SBM

Realização

impa MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL