.Problema para ajudar na escola: Uma função de Euler

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Leonhard Euler (1707-1783) foi um brilhante matemático suíço que deixou inúmeras contribuições não só para a Matemática, mas também para a Física, para a Química e para a Astronomia.
Entre seus inúmeros feitos, Euler definiu uma importante função, comumente denotada pela letra grega φ (phi), bastante utilizada em Teoria dos Números, em particular na Criptografia.
Essa função, hoje conhecida como **função φ de Euler**, associa a cada inteiro positivo n a quantidade de **inteiros positivos menores do que n que são coprimos com n**.

Considere a função

$$\begin{aligned} \varphi:\ \{1,2,3,4,5,\cdots\} &\to \{1,2,3,4,5,\cdots\} \\ n &\mapsto \varphi(n) \end{aligned}$$

em que $\varphi(n)$ é a quantidade de inteiros positivos menores do que n que são coprimos com n.

(a) Determine $\varphi(20)$.
(b) Determine $\varphi(23)$.
(c) Se p é um número natural primo, determine $\varphi(p)$.

Lembrete

Se m e n são números naturais tais $mdc(n,m)=1$, então m e n são ditos **coprimos**, ou **relativamente primos** ou, ainda, **primos entre si**.

Solução

(a) Poderíamos calcular o mdc entre 20 e todos os números naturais menores do que 20 e contarmos aqueles para os quais o mdc é igual 1. Mas podemos economizar tempo e contas, observando que:

➤ Como 20 é um número par, então todo número natural par a é tal que $mdc(a, 20) \neq 1$; já que, nesse caso, $mdc(a, 20) \geqslant 2$.

➤ Como 20 é um múltiplo de 5, então todo número natural b múltiplo de 5 é tal que $mdc(b, 20) \neq 1$; já que, nesse caso, $mdc(b, 20) \geqslant 5$.

Dessa forma, não precisamos calcular o mdc entre 20 e os números naturais menores do que 20 que são pares ou múltiplos de 5. Vamos então aos cálculos, lembrando que a decomposição de 20 como produto de potências de números primos é $20 = 2^2 \cdot 5$.

$mdc(20, 1) = 1$; $mdc(20, 3) = 1$; $mdc(20, 7) = 1$; $mdc(20, 9) = 1$; $mdc(20, 11) = 1$; $mdc(20, 13) = 1$; $mdc(20, 17) = 1$; $mdc(20, 19) = 1$.

Pelos nossos cálculos, concluímos que $\boxed{\varphi(20) = 8}$.

(b) Neste item também poderíamos calcular o mdc entre 23 e todos os números naturais menores do que ele. Mas observe que 23 é um número primo; assim, se x é um número natural menor do que 23, todos os fatores primos de x são menores do que 23 e, com isso, $mdc(23, x) = 1$. Assim, todo número natural menor do que 23 é coprimo com 23; portanto, concluímos que $\boxed{\varphi(23) = 22}$.

(c) Este item é uma generalização do item anterior, por isso vamos utilizar o mesmo raciocínio!

Sejam p um número natural primo e m um número natural menor do que p. Note que qualquer divisor d de m é tal que $d \leqslant m$, donde $d < p$. Como p e 1 são os únicos divisores de p, então p e m têm apenas um divisor comum: 1.

Dessa forma, qualquer número natural não nulo m menor do que p é tal que $mdc(p, m) = 1$ e, portanto, os coprimos com p menores do que ele são:

$$\underbrace{1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\,,\,p-1}_{p-1}$$

Com isso, concluímos que se p é um número natural primo, então $\boxed{\varphi(p) = p - 1}$.

Assim, em particular, $\varphi(11) = 10$, $\varphi(13) = 12$, $\varphi(19) = 18$, $\varphi(2719) = 2718$, $\varphi(8893) = 8892$ e $\varphi(p) = p - 1$, para todos os 1229 números **desta lista**.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Um vídeo

A **função φ de Euler** é também conhecida como **função totiente de Euler** e pode ser denotada igualmente pela letra grega phi maiúscula: Φ.

Assista a um vídeo da *Khan Academy* sobre essa função e aprenda um pouco mais sobre ela: é só clicar na setinha e

Bons Estudos!

Clique AQUI para abrir o vídeo.