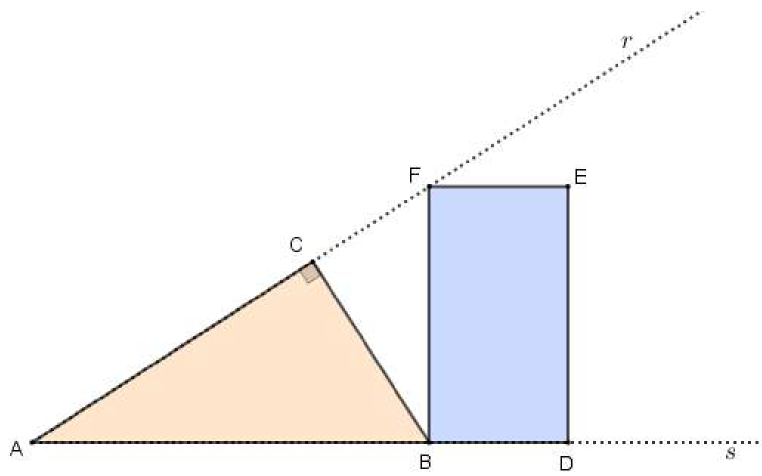
.Problema para ajudar na escola: Uma distância não trivial!

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Na figura, os pontos A, C, F são colineares, assim como os pontos A, B, D .
Sabendo-se que o triângulo retângulo BCA tem a mesma área do retângulo $BDEF$ e que os comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{BF}$ são, respectivamente, $6\,cm$ e $7\,cm$, determinar a distância do ponto E à semirreta r .



Notação: Denotaremos o segmento definido por dois pontos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e o seu comprimento por XY.

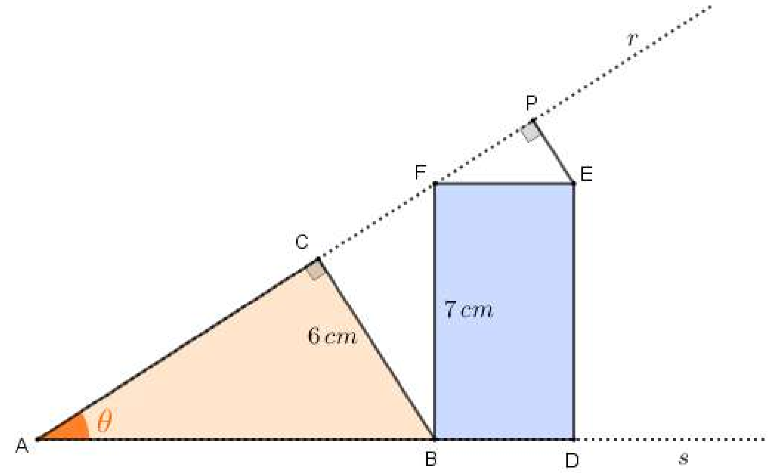
Lembretes

(1) Ângulos correspondentes definidos por retas paralelas têm a mesma medida. (Se você não se lembra dos ângulos correspondentes, clique **AQUI**.)

(2) A medida de um ângulo externo a um triângulo qualquer é a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo que não são adjacentes a ele. (Se você não se lembra desse resultado, clique **AQUI**.)

Solução

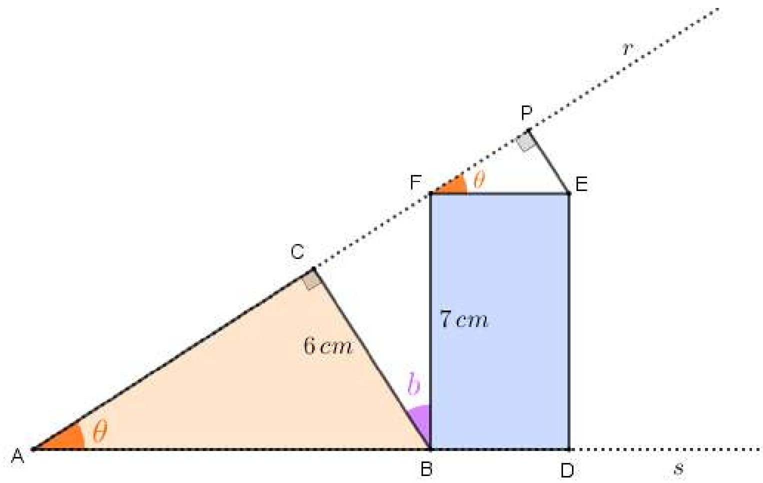
Sejam P o pé da perpendicular à reta r traçada a partir do ponto E e θ a medida em graus do ângulo $B\hat{A}C$, conforme ilustra a figura abaixo, na qual também indicamos as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{BF}$.



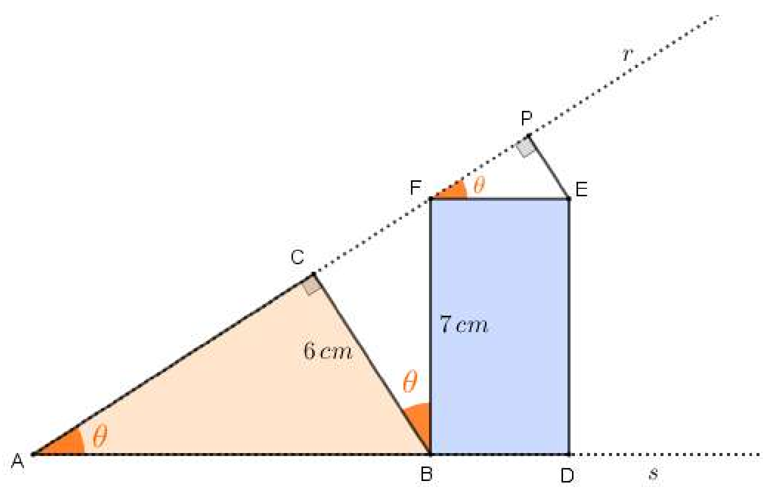
Para determinar a distância do ponto E à semirreta r, vamos, então calcular o comprimento do segmento $\overline{PE}$. Para isso, observe inicialmente que:

- os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{FE}$ são paralelos; logo, os ângulos $B\hat{A}C$ e $E\hat{F}P$ são correspondentes. Portanto, pelo **Lembrete (1)**, a medida de $E\hat{F}P$ é também θ.

Vamos determinar, agora, a medida em graus do ângulo $F\hat{B}C$, a qual inicialmente denotaremos por b.



- Perceba que $C\hat{B}D$ é um ângulo externo ao triângulo ABC e tem medida igual a $b+90^\circ$; assim, pelo **Lembrete (2)**, temos que $b+90^\circ=\theta+90^\circ$, donde $b=\theta$.



Com os dados que aparecem na figura acima, já estamos em condições de determinar a distância de E à r. Vamos lá!
A partir dos triângulos retângulos BAC e EFP, podemos obter, respectivamente, as seguintes relações:

$$\boxed{tg\,\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{6}{AC}},\ (i) \qquad \text{e} \qquad \boxed{sen\,\theta=\frac{PE}{FE}},\ (ii).$$

Por outro lado, uma das hipóteses do problema nos assegura que o triângulo retângulo BCA tem a mesma área do retângulo $BDEF$; assim, indicando essas áreas respectivamente por $[BCA]$ e $[BDEF]$, segue que:

$$[BCA]=[BDEF]$$

$$\frac{AC\times BC}{2}=BF\times FE$$

$$\frac{AC\times 6}{2}=7\times FE$$

$$\frac{\frac{6}{tg\,\theta}\cdot 6}{2}\overset{(i)}{=}7\times FE$$

$$\frac{18}{tg\,\theta} = 7 \times FE$$

$$\frac{18}{tg\,\theta} \overset{(ii)}{=} 7 \times \frac{PE}{sen\,\theta}$$

$$PE = \frac{18 \cdot sen\,\theta}{7 \cdot tg\,\theta} = \frac{18 \cdot sen\,\theta}{7 \cdot \dfrac{sen\,\theta}{cos\,\theta}} = \frac{18 \cdot \cancel{sen\,\theta} \cdot cos\,\theta}{7 \cdot \cancel{sen\theta}}$$

$$PE = \frac{18}{7} \cdot cos\,\theta\,. \quad (iii)$$

Mas, observando o triângulo retângulo BCF, vemos que $cos\,\theta = \frac{6}{7}$; logo, de (iii), segue que:

$$PE = \frac{18}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{108}{49}\,.$$

Portanto, a distância do ponto E à semirreta r é $\boxed{\frac{108}{49}\,cm}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.