



## .Problema para ajudar na escola: Uma desigualdade modular



### Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Determine qual é o menor número inteiro  $x$  tal que  $\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2$ .

(Extraído do livro **Matemática – Volume único**: Gelson Iezzi e outros.)



### Lembretes

**Definição:** Se  $A$  é um número real, chamamos de "**módulo de  $A$** " ou "**valor absoluto de  $A$** " ao número real denotado por  $|A|$  e assim definido:

$$|A| = \begin{cases} A, & \text{se } A \geq 0 \\ -A, & \text{se } A < 0 \end{cases}.$$

**Propriedades importantes:** Sejam  $A$  e  $B$  números reais, com  $B > 0$ .

**(1)** Se  $|A| = B$ , então  $A = B$  ou  $A = -B$ .

Em símbolos:  $|A| = B \Rightarrow A = B$  ou  $A = -B$ .

**(2)** Se  $|A| < B$ , então  $-B < A < B$ .

Em símbolos:  $|A| < B \Rightarrow -B < A < B$ .

**(3)** Se  $|A| > B$ , então  $A < -B$  ou  $A > B$ .

Em símbolos:  $|A| > B \Rightarrow A < -B$  ou  $A > B$ .

**(4)** Se  $|A| \leq B$ , então  $-B \leq A \leq B$ .

Em símbolos:  $|A| \leq B \Rightarrow -B \leq A \leq B$ .

**(5)** Se  $|A| \geq B$ , então  $A \leq -B$  ou  $A \geq B$ .

Em símbolos:  $|A| \geq B \Rightarrow A \leq -B$  ou  $A \geq B$ .

### Solução

Pela propriedade **(4)** do Lembrete,

$$\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2 - \frac{3}{x} \leq 2.$$

Assim, se  $x$  é um número inteiro tal que  $\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2$ , obtemos a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

$$-2 \leq 2 - \frac{3}{x} \leq 2$$

$$-2 - 2 \leq 2 - \frac{3}{x} - 2 \leq 2 - 2$$

$$-4 \leq \frac{-3}{x} \leq 0$$

$$-4 \cdot (-1) \geq \frac{-3}{x} \cdot (-1) \geq 0 \cdot (-1)$$

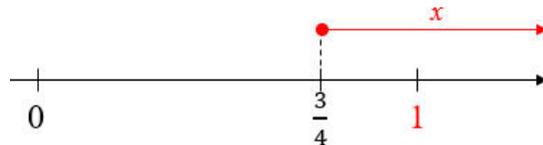
$$4 \geq \frac{3}{x} \geq 0. \quad (i)$$

De (i), temos que  $0 \leq \frac{3}{x}$ , o que nos garante que  $0 < x$ . (Se  $x$  fosse 0, a fração  $\frac{3}{x}$  não estaria definida, não é?)

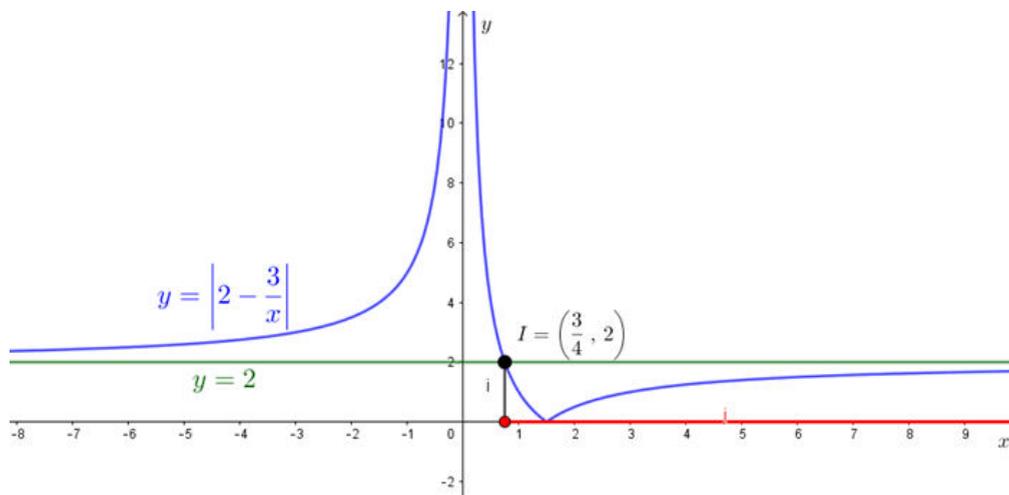
Dessa forma, ainda de (i), podemos concluir que, se  $x$  é um número inteiro tal que  $\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2$ , então:

$$x \geq \frac{3}{4}. \quad (ii)$$

Como no problema é solicitado o menor número inteiro  $x$  tal que  $\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2$ , segue de (ii) que  $x = 1$ . (Veja o esqueminha abaixo)



Vocês podem visualizar geometricamente essa solução traçando o gráfico da função definida por  $f(x) = \left|2 - \frac{3}{x}\right|$  e da reta  $y = 2$  em um mesmo plano cartesiano, conforme ilustra a figura a seguir.



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.