

.Problema para ajudar na escola: Uma desigualdade modular



Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Determine qual é o menor número inteiro x tal que $\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2$.

(Extraído do livro **Matemática – Volume único**: Gelson Iezzi e outros.)



Lembretes

Definição: Se A é um número real, chamamos de "**módulo de A** " ou "**valor absoluto de A** " ao número real denotado por $|A|$ e assim definido:

$$|A| = \begin{cases} A, & \text{se } A \geq 0 \\ -A, & \text{se } A < 0 \end{cases}.$$

Propriedades importantes: Sejam A e B números reais, com $B > 0$.

(1) Se $|A| = B$, então $A = B$ ou $A = -B$.

Em símbolos: $|A| = B \Rightarrow A = B$ ou $A = -B$.

(2) Se $|A| < B$, então $-B < A < B$.

Em símbolos: $|A| < B \Rightarrow -B < A < B$.

(3) Se $|A| > B$, então $A < -B$ ou $A > B$.

Em símbolos: $|A| > B \Rightarrow A < -B$ ou $A > B$.

(4) Se $|A| \leq B$, então $-B \leq A \leq B$.

Em símbolos: $|A| \leq B \Rightarrow -B \leq A \leq B$.

(5) Se $|A| \geq B$, então $A \leq -B$ ou $A \geq B$.

Em símbolos: $|A| \geq B \Rightarrow A \leq -B$ ou $A \geq B$.

Solução

Pela propriedade **(4)** do Lembrete,

$$\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2 - \frac{3}{x} \leq 2.$$

Assim, se x é um número inteiro tal que $\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2$, obtemos a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

$$-2 \leq 2 - \frac{3}{x} \leq 2$$

$$-2 - 2 \leq 2 - \frac{3}{x} - 2 \leq 2 - 2$$

$$-4 \leq \frac{-3}{x} \leq 0$$

$$-4 \cdot (-1) \geq \frac{-3}{x} \cdot (-1) \geq 0 \cdot (-1)$$

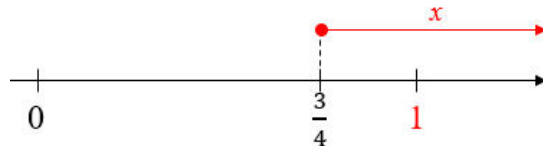
$$4 \geq \frac{3}{x} \geq 0. \quad (i)$$

De (i), temos que $0 \leq \frac{3}{x}$, o que nos garante que $0 < x$. (Se x fosse 0, a fração $\frac{3}{x}$ não estaria definida, não é?)

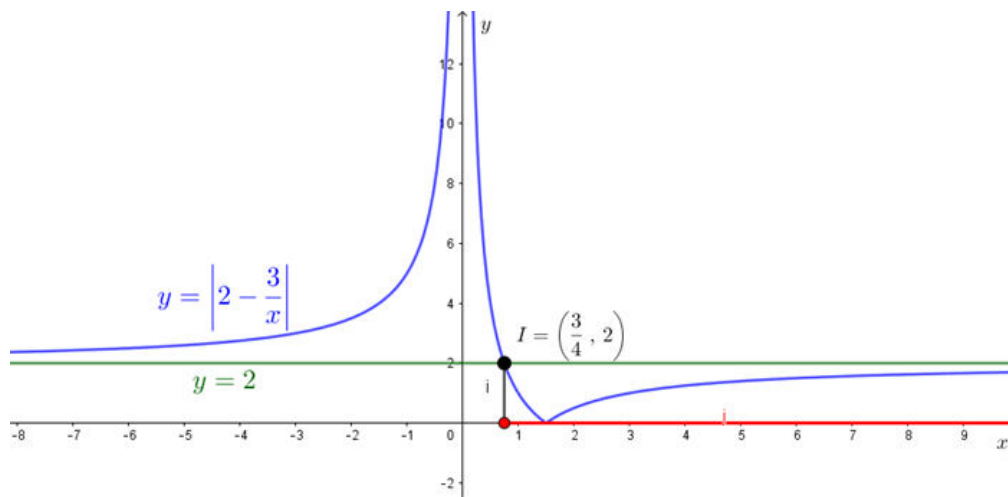
Dessa forma, ainda de (i), podemos concluir que, se x é um número inteiro tal que $\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2$, então:

$$x \geq \frac{3}{4}. \quad (ii)$$

Como no problema é solicitado o menor número inteiro x tal que $\left|2 - \frac{3}{x}\right| \leq 2$, segue de (ii) que $x = 1$. (Veja o esqueminha abaixo)



Vocês podem visualizar geometricamente essa solução traçando o gráfico da função definida por $f(x) = \left|2 - \frac{3}{x}\right|$ e da reta $y = 2$ em um mesmo plano cartesiano, conforme ilustra a figura a seguir.



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.