.Problema para ajudar na escola: Uma cossecante

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Sejam α e β ângulos agudos tais que:

- $\sqrt{7}\,(tg\,\alpha)=5\,(tg\,\beta)$
- $4\,(sen\,\alpha)=5\,(sen\,\beta)\,.$

Determine a cossecante do ângulo β.

Solução 1

Seja θ um ângulo agudo. Se você conhece as definições básicas da trigonometria, só vai precisar das seguintes definições

$$\boxed{cotg\,\theta=\frac{1}{tg\,\theta}} \qquad \boxed{cossec\,\theta=\frac{1}{sen\,\theta}}$$

e da seguinte identidade

$$\boxed{cossec^2\,\theta-1=cotg^2\,\theta}$$

para resolver este problema.
Observe!
Como α e β são ângulos agudos, das hipóteses $\sqrt{7}\,(tg\,\alpha)=5\,(tg\,\beta)$ e $4\,(sen\,\alpha)=5\,(sen\,\beta)$, segue que:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{7}\,(tg\,\alpha)=5\,(tg\,\beta)\\
&\sqrt{7}\left(\frac{1}{tg\,\beta}\right)=5\left(\frac{1}{tg\,\alpha}\right)\\
&\sqrt{7}\,(cotg\,\beta)=5\,(cotg\,\alpha)\\
&\left(\sqrt{7}\,(cotg\,\beta)\right)^2=(5\,(cotg\,\alpha))^2\\
&7\left(cotg^2\,\beta\right)=25\left(cotg^2\,\alpha\right). \qquad (i)
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
&4\,(sen\,\alpha)=5\,(sen\,\beta)\\
&4\left(\frac{1}{sen\,\beta}\right)=5\left(\frac{1}{sen\,\alpha}\right)\\
&4\,(cossec\,\beta)=5\,(cossec\,\alpha)\\
&(4\,(cossec\,\beta))^2=(5\,(cossec\,\alpha))^2\\
&16\left(cossec^2\,\beta\right)=25\left(cossec^2\,\alpha\right). \qquad (ii)
\end{aligned}$$

Fazendo a diferença entre as igualdades (ii) e (i), segue que:

$$\begin{aligned}
&16\left(cossec^2\,\beta\right)-7\left(cotg^2\,\beta\right)=25\left(cossec^2\,\alpha\right)-25\left(cotg^2\,\alpha\right)\\
&16\left(cossec^2\,\beta\right)-7\left(cossec^2\,\beta-1\right)=25\left(cossec^2\,\alpha\right)-25\left(cossec^2\,\alpha-1\right)\\
&9\left(cossec^2\,\beta\right)+7=25\\
&9\left(cossec^2\,\beta\right)=18\\
&cossec^2\,\beta=2\\
&cossec\,\beta=\pm\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Como β é um ângulo agudo, $cossec\,\beta>0$; portanto, $\boxed{cossec\,\beta=\sqrt{2}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Seja θ um ângulo agudo.

Se da trigonometria você conhece apenas senos e cossenos de ângulos agudos, não faz mal, pois tangentes e cossecantes são apenas “disfarces” de senos e cossenos.

Neste caso, para resolver o problema, você só precisará, obviamente, das definições de tangente e cossecante:

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}} \qquad \boxed{cossec\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}}$$

e da identidade fundamental da trigonometria:

$$\boxed{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}\,.$$

Veja só!

Como α e β ângulos agudos, das hipóteses $\sqrt{7}\,(tg\,\alpha) = 5\,(tg\,\beta)$ e $4\,(sen\,\alpha) = 5\,(sen\,\beta)$, segue que:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{7}\,(tg\,\alpha) = 5\,(tg\,\beta)\\
&\sqrt{7}\left(\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}\right) = 5\left(\frac{sen\,\beta}{cos\,\beta}\right)\\
&\frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta} = \frac{5}{\sqrt{7}}\cdot\frac{cos\,\alpha}{cos\,\beta}. \qquad (i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&4\,(sen\,\alpha) = 5\,(sen\,\beta)\\
&\frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta} = \frac{5}{4} \qquad (ii)\\
&sen^2\,\alpha = \frac{25}{16}\cdot sen^2\,\beta. \qquad (iii)
\end{aligned}$$

De (ii) e (i), segue que:

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{\sqrt{7}}\cdot\frac{cos\,\alpha}{cos\,\beta} = \frac{5}{4}\\
&\frac{\cancel{5}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{cos\,\alpha}{cos\,\beta} = \frac{\cancel{5}}{4}\\
&4\,(cos\,\alpha) = \sqrt{7}\,(cos\,\beta)\\
&(4\,(cos\,\alpha))^2 = \left(\sqrt{7}\,(cos\,\beta)\right)^2\\
&16\left(cos^2\,\alpha\right) = 7\left(cos^2\,\beta\right)\\
&16\left(1 - sen^2\,\alpha\right) = 7\left(1 - sen^2\,\beta\right)\\
&16 - 16\left(sen^2\,\alpha\right) = 7 - 7\left(sen^2\,\beta\right)\\
&9 + 7\left(sen^2\,\beta\right) = 16\left(sen^2\,\alpha\right). \qquad (iv)
\end{aligned}$$

Finalmente, de (iv) e (iii), obtemos:

$$\begin{aligned}
&9 + 7\left(sen^2\,\beta\right) = 16\left(\frac{25}{16}\cdot sen^2\,\beta\right)\\
&9 + 7\left(sen^2\,\beta\right) = \cancel{16}\left(\frac{25}{\cancel{16}}\cdot sen^2\,\beta\right)\\
&9 + 7\left(sen^2\,\beta\right) = 25\left(sen^2\,\beta\right)\\
&9 = 18\left(sen^2\,\beta\right)\\
&\frac{1}{sen^2\,\beta} = \frac{18}{9}\\
&cossec^2\,\beta = 2\\
&cossec\,\beta = \pm\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Como β é um ângulo agudo, $cossec\,\beta > 0$, já que $sen\,\beta > 0$ e $cossec\,\beta = \dfrac{1}{sen\,\beta}$. Portanto, $\boxed{cossec\,\beta = \sqrt{2}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.