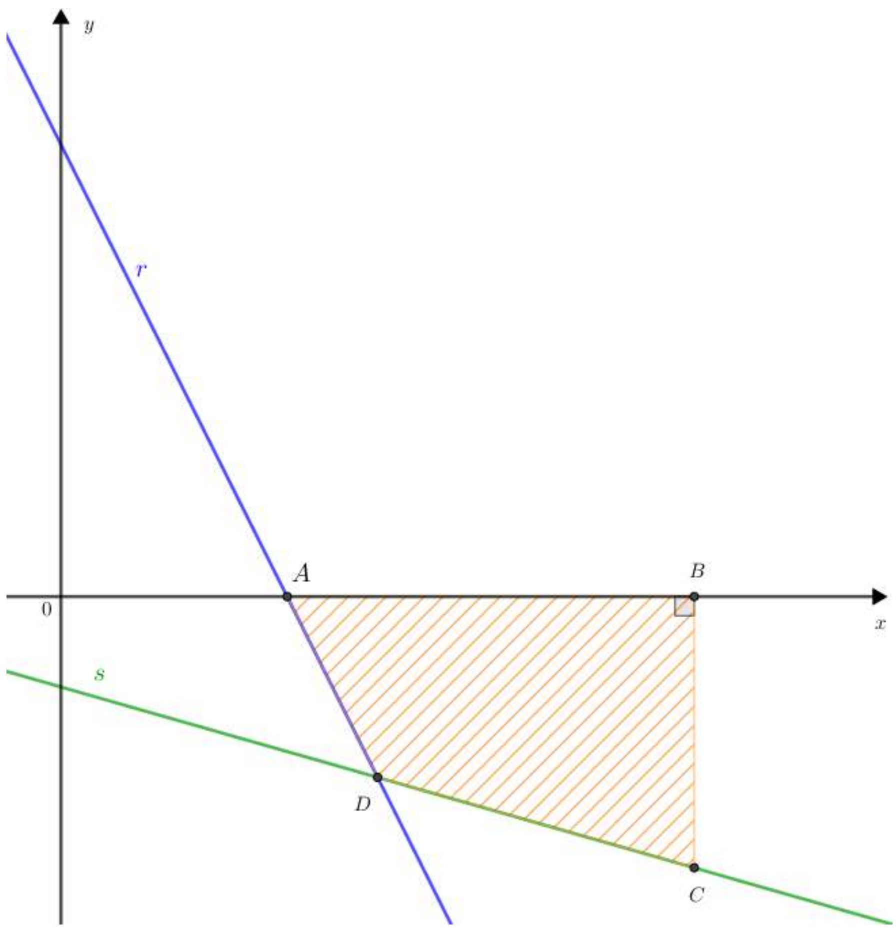
.Problema para ajudar na escola: Área em um plano cartesiano

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

As retas r e s mostradas no plano cartesiano xOy abaixo têm as seguintes equações gerais:

$$r: 2x + y - 10 = 0,$$
$$s: 2x + 7y + 14 = 0.$$



Sabendo que:

- A e B são pontos do eixo Ox;
- A e D são pontos de r;
- C e D são pontos de s;
- A distância do ponto B à origem do sistema é 14;

determinar a área do quadrilátero $ABCD$.

Solução

(1) Antes de mais nada, vamos determinar as coordenadas dos pontos A, B, C e D com relação ao plano cartesiano xOy fixado. A princípio, essas coordenadas serão assim denotadas:

$$A = (x_A, y_A)\,; \qquad B = (x_B, y_B)\,; \qquad C = (x_C, y_C)\,; \qquad D = (x_D, y_D)\,.$$

- Como A e B são pontos do eixo Ox, então $y_A = y_B = 0$, ou seja: $A = (x_A, 0)$ e $B = (x_B, 0)$.
- A distância do ponto B à origem do sistema é 14; logo, $\boxed{B = (14, 0)}$.
- $A = (x_A, 0)$ é ponto da reta r; assim, as coordenadas de A satisfazem a equação de r:

  $$r : 2x + y - 10 = 0$$
  $$2x_A + 0 - 10 = 0$$
  $$2x_A = 10$$
  $$x_A = 5.$$

  Dessa forma, $\boxed{A = (5, 0)}$.

- O segmento $\overline{BC}$ é perpendicular ao eixo Ox, donde $x_B = x_C$, ou seja, $C = (14, y_C)$. E como C é ponto da reta s, suas coordenadas satisfazem a equação de s:

  $$s : 2x + 7y + 14 = 0$$
  $$2 \times 14 + 7y_C + 14 = 0$$
  $$28 + 7y_C + 14 = 0$$
  $$7y_C = -42$$
  $$y_C = -6.$$

  Portanto, $\boxed{C = (14, -6)}$.

- $D = (x_D, y_D)$ é ponto das retas r e s; assim, as coordenadas de D satisfazem simultaneamente as equações de r e de s. Com isso

  $$2x_D + y_D - 10 = 0 = 2x_D + 7y_D + 14 \ ,$$

  donde segue que:

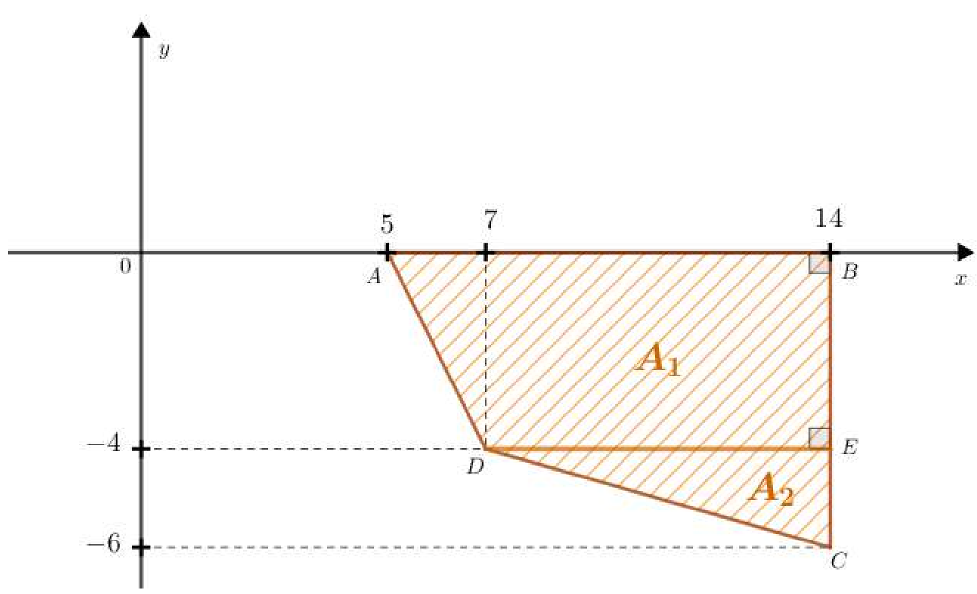
  $$\cancel{2x_D} + y_D - 10 = \cancel{2x_D} + 7y_D + 14.$$
  $$y_D - 10 = 7y_D + 14.$$
  $$-6y_D = 24.$$
  $$y_D = -4.$$

  De $2x_D + y_D - 10 = 0$ e $y_D = -4$, vem que:

  $$2x_D - 4 - 10 = 0$$
  $$2x_D = 14$$
  $$x_D = 7$$

  e, portanto, $\boxed{D = (7, -4)}$.

(2) Para calcularmos a área do quadrilátero $ABCD$, podemos decompô-lo em figuras cujas áreas possam ser facilmente calculadas. A figura a seguir mostra uma dessas decomposições.
Observe que na figura já aparecem as coordenadas que calculamos no item anterior.



- A área A do quadrilátero $ABCD$ pode ser particularmente decomposta como $A = A_1 + A_2$, onde:
  - A_1 é a área do trapézio retângulo $ABED$,
  - A_2 é a área do triângulo retângulo DEC.

Vamos aos cálculos das áreas A_1 e A_2:

- $A_1 = \dfrac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$

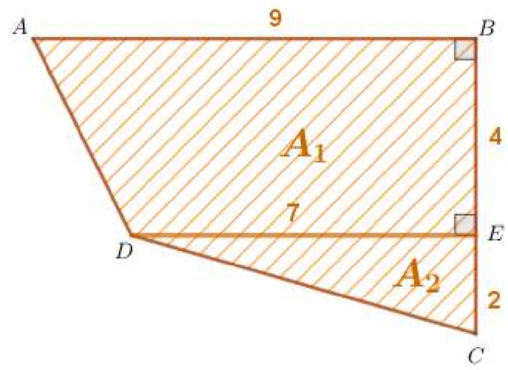
  $A_1 = \dfrac{(9+7)\times 4}{2}$

  $A_1 = 32$ unidades de área.

- $A_2 = \dfrac{\text{base } \times \text{altura}}{2}$

  $A_2 = \dfrac{7 \times 2}{2}$

  $A_2 = 7$ unidades de área.



Portanto, a área do quadrilátero $ABCD$ é $\boxed{A = 32 + 7 = 39}$ unidades de área.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.