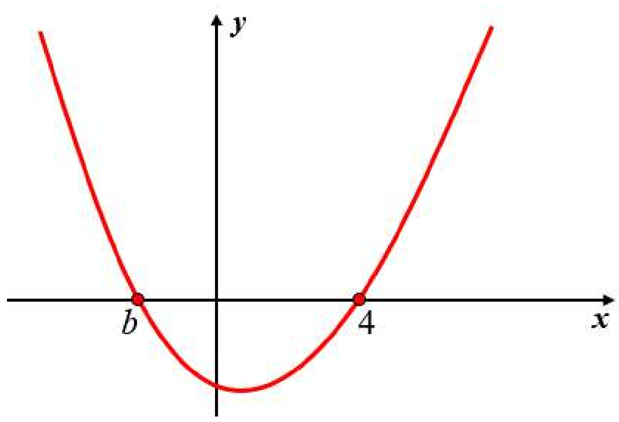
.Problema para ajudar na escola: Um valor numérico

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Na figura abaixo, vemos o gráfico da função quadrática assim definida: $f(x)=x^2+bx+c$.



Determine $f(8)$.

Lembretes para Solução 1

(1) Uma das relações de Girard afirma que a soma das raízes de uma equação do segundo grau é igual à razão entre o oposto do coeficiente de x e o coeficiente de x^2, ou seja, a soma das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ é dada por $\boxed{\dfrac{-b}{a}}$.

(2) Uma outra relação de Girard afirma que o produto das raízes de uma equação do segundo grau é igual à razão entre o seu termo independente c e o seu coeficiente de x^2, o que implica dizer que o produto das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ é dado por $\boxed{\dfrac{c}{a}}$.

(Para conhecer um pouco mais sobre as **relações de Girard**, cliquem **AQUI**)

Solução 1

Observando o gráfico da função f, vemos que $f(b)=f(4)=0$, ou seja, os números b e 4 são raízes da equação do segundo grau $x^2+bx+c=0$.
Utilizando, então, as relações de Girard para a soma e para o produto de raízes de uma equação do segundo grau, temos:

$$b+4=\frac{-b}{1}=-b \qquad \text{e} \qquad b\cdot 4=\frac{c}{1}=c\,,$$

de onde obtemos $\boxed{b=-2}$ e $\boxed{c=-8}$.
Com isso, a expressão que define a função f é $\boxed{f(x)=x^2-2x-8}$ e fazendo $x=8$, segue que:

$$\boxed{f(8)=8^2-2\cdot 8-8=40}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Lembretes para Solução 2

(1) O gráfico de uma função quadrática $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $h(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, é uma parábola com diretriz paralela ao eixo OX, eixo de simetria paralelo ao eixo Oy, sendo sua concavidade voltada para cima se $a>0$ e voltada para baixo se $a<0$.

(2) Se $\Delta=b^2-4ac$, as coordenadas do vértice da parábola do gráfico de h são dadas por:

$$(x_v,y_v)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right),$$

sendo que $x_v=\dfrac{-b}{2a}$ e $y_v=\dfrac{-\Delta}{4a}$ indicam, respectivamente:

✓ o ponto de mínimo e o valor mínimo da função h, se a concavidade estiver voltada para cima;

✓ o ponto de máximo e o valor máximo da função h, se a concavidade estiver voltada para baixo.

Particularmente, se $\Delta>0$, x_v é a média entre as duas raízes de h: $x_v=\frac{r_1+r_2}{2}$

Solução 2

Observando o gráfico da função dado no problema, vemos que os números b e 4 são raízes (ou os zeros) da função f e, como a coordenada x_v do vértice do gráfico de f é a média dessas raízes, segue que

$$x_v=\frac{b+4}{2}$$
$$\frac{-b}{2}=\frac{b+4}{2}$$
$$-b=b+4$$
$$-2b=4$$

e, então, $\boxed{b=-2}$.

Dessa forma, podemos reescrever a expressão que define f como $\boxed{f(x)=x^2-2x+c}$.

Mas sabemos que 4 é uma raiz (ou o zero) da função f, assim:

$$f(4)=0$$
$$4^2-2\cdot 4+c=0$$
$$16-8+c=0$$

e, então $\boxed{c=-8}$.

Dessa forma, a expressão que define a função f é $\boxed{f(x)=x^2-2x-8}$ e, portanto, $\boxed{f(8)=8^2-2\cdot 8-8=40}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.