.Problema para ajudar na escola: Um triângulo numérico

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(**ONEM** – 2007) Abaixo, vemos as quatro primeiras linhas de um triângulo numérico formado por todos os números ímpares, distribuídos de forma padrão. Qual a soma de todos os números que compõem a linha 21 desse triângulo numérico?

Linha 1	$\rightarrow$				1			
Linha 2	$\rightarrow$			3		5		
Linha 3	$\rightarrow$		7		9		11	
Linha 4	$\rightarrow$	13		15		17		19
$\vdots$		$\dots$						$\dots$

Lembrete

A soma dos t primeiros números naturais não nulos é dada por

$$\boxed{1+2+3+\cdots+t=\frac{(1+t)\cdot t}{2}}\ .$$

(Se precisar, visite **esta página**.)

De modo geral, a soma dos t primeiros termos de uma progressão aritmética

$$(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,\cdots\,,\,x_t\,,\,\cdots)$$

é dada por:

$$\boxed{\frac{(x_1+x_t)\cdot t}{2}}\ .$$

Solução 1

Vamos observar algumas características das linhas do triângulo numérico do problema.

	quantidade de elementos	primeiro elemento	último elemento
Linha 1	1	1	1
Linha 2	2	$3=2\times 1+1$	$5=2\times(1+1)+1$
Linha 3	3	$7=2\times 3+1$	$11=2\times(3+2)+1$
Linha 4	4	$13=2\times 6+1$	$19=2\times(6+3)+1$
Linha 5	5	$21=2\times 10+1$	$29=2\times(10+4)+1$

Observe que:

- o número em vermelho que define o primeiro elemento de cada linha é a quantidade de elementos que foram escritos nas linhas anteriores:

$$\begin{aligned}&linha\,2: \color{red}{1} = 1\\&linha\,3: \color{red}{3} = 1+2\\&linha\,4: \color{red}{6} = 1+2+3\\&linha\,5: \color{red}{10} = 1+2+3+4;\end{aligned}$$

- o número em azul que define o último elemento de cada linha é a quantidade de elementos da respectiva linha que já foram escritos. A soma dos números em vermelho e azul é, portanto, a quantidade de elementos até então escritos:

$$\begin{aligned}&linha\,2: \color{blue}{1} = 2-1\\&linha\,3: \color{blue}{2} = 3-1\\&linha\,4: \color{blue}{3} = 4-1\\&linha\,5: \color{blue}{4} = 5-1.\end{aligned}$$

Assim, o primeiro e último elementos escritos em uma linha genérica n são definidos respectivamente por:

$$\begin{aligned}2\times(\color{red}{1+2+3+\cdots+(n-1)})+1 &= 2\times\left(\color{red}{\frac{n(n-1)}{2}}\right)+1\\&=\boxed{n^2-n+1};\\2\times((\color{red}{1+2+3+\cdots+(n-1)})+\color{blue}{(n-1)})+1 &= 2\times\left(\color{red}{\frac{n(n-1)}{2}}+\color{blue}{(n-1)}\right)+1\\&=2\times\left(\frac{n^2-n+2n-2}{2}\right)+1\\&=n^2-n+2n-2+1\\&=\boxed{n^2+n-1}.\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos definir uma linha genérica da tabela, conforme mostramos abaixo.

	quantidade de elementos	primeiro elemento	último elemento
Linha 1	1	1	1
Linha 2	2	3	5
Linha 3	3	7	11
Linha 4	4	13	19
Linha 5	5	21	29
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Linha n	n	n^2-n+1	n^2+n-1

Em particular, o primeiro e o último elementos da linha 21 são, respectivamente,

$$p = 21^2-21+1 = 421\ ,$$
$$u = 21^2+21-1 = 461\ .$$

	quantidade de elementos	primeiro elemento	último elemento
Linha 1	1	1	1
Linha 2	2	3	5
Linha 3	3	7	11
Linha 4	4	13	19
Linha 5	5	21	29
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Linha 21	21	421	461

Logo, a soma S de todos os elementos da linha 21 do nosso triângulo numérico é $S = 421+423+\cdots+461$ e é essa soma que vamos calcular. Para isso, vamos utilizar a fórmula geral do **Lembrete**.

Observe que a soma dos 21 primeiros termos da progressão aritmética

$$(421\,,\,423\,,\,425\,,\,\cdots\,,\,461\,,\,\cdots)$$

é dada por:

$$\frac{(421+461)\cdot 21}{2}=9261\,;$$
portanto, a soma de todos os números que compõem a linha 21 do triângulo numérico é $\boxed{9\,261}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Uma ajuda para a segunda solução

A soma dos t primeiros números ímpares não nulos é t^2:

$$\boxed{\underbrace{1+3+5+\cdots+(2t-1)}_{\text{t números}}=t^2}.$$

Solução 2

Observe a soma dos elementos das primeiras linhas do triângulo numérico:

- Linha $1:\ 1=1^3$
- Linha $2:\ 3+5=8=2^3$
- Linha $3:\ 7+9+11=27=3^3$
- Linha $4:\ 13+15+17+19=64=4^3$.

A partir desse resultado, somos levados a intuir que a soma dos elementos da linha 21 do triângulo numérico da questão seja 21^3. Mas é necessária uma demonstração formal dessa afirmação e é isso que faremos. Para isso, denotaremos por S_n a soma dos elementos da linha n do triângulo numérico.

Como

$$(S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots+S_{20}+S_{21})-(S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots+S_{19}+S_{20})=S_{21}\,,\qquad (i)$$

vamos calcular isoladamente as somas que definem o minuendo e o subtraendo da diferença (i).

- Minuendo

  Inicialmente, observe que:

  $$S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots+S_{20}+S_{21}=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+\cdots+(2k_1-1)$$

  sendo k_1 a quantidade de elementos que foram somados nas 21 filas do triângulo numérico.

  Para podermos utilizar a fórmula da ajuda e obter S_{21} precisaremos determinar k_1. Para isso, note que no minuendo somamos todos os elementos das filas $1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ 21$.

  Mas observe a quantidade de elementos que temos em cada linha:

Linhas	quantidade de elementos
Linha 1	1
Linha 2	2
Linha 3	3
Linha 4	4
Linha 5	5
$\vdots$	$\vdots$
Linha 20	20
Linha 21	21

  assim, somamos:

  $$1+2+3+\cdots+21=\frac{(1+21)\cdot 21}{2}=231\ \text{ elementos.}$$

Logo $k_1 = 231$ e, portanto, o valor do minuendo é dado por:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_{20} + S_{21} &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + \cdots + (2k_1 - 1) \\ &= k_1^2 = 231^2 \\ &= 53\,361. \end{aligned}$$

- Subtraendo

  Analogamente, observe que:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_{19} + S_{20} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + \cdots + (2k_2 - 1)$$

  sendo k_2 a quantidade de elementos que foram somados nas 20 filas do triângulo numérico.
  Podemos utilizar a fórmula da ajuda para obter S_{20} se conhecermos k_2. Para calcular k_2, observe que no subtraendo somamos todos os elementos das linhas $1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ 20$.
  Com a tabela acima, temos a quantidade de elementos em cada uma das 20 linhas; assim, somamos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 20 = \frac{(1+20)\cdot 20}{2} = 210 \text{ elementos.}$$

  Dessa forma, $k_2 = 210$ e o subtraendo pode ser assim calculado:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_{19} + S_{20} &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + \cdots + (2k_2 - 1) \\ &= k_2^2 = 210^2 \\ &= 44\,100. \end{aligned}$$

Finalmente, por (i), segue que:

$$S_{21} = 53\,361 - 44\,100 = 9\,261.$$

Pelo exposto, a soma de todos os números que compõem a linha 21 do triângulo numérico é $\boxed{9\,261}$.

E não é que $\boxed{9\,261 = 21^3}$?

Legal ! ! !

Podemos generalizar essa última observação. Veja como:

- Até a linha n, há $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ números ímpares, cuja soma é $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- Até a linha $n+1$, há $1 + \cdots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ números ímpares, cuja soma é $\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

Logo, a soma dos elementos da linha $n+1$ pode ser assim calculada:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ &= (n+2)^2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - n^2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 [(n+2)^2 - n^2] \\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 (\cancel{n^2} + 4n + 4 - \cancel{n^2}) \\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 (4n+4) \\ &= \frac{(n+1)^2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}(n+1) \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

Portanto, de fato, $\boxed{S_{n+1} = (n+1)^3}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.