.Problema para ajudar na escola: Um sólido de revolução

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

A **Figura 1** mostra um triângulo retângulo ABC e um retângulo $BDEF$, sendo C um ponto do segmento BF.
As medidas que aparecem na figura estão expressas em centímetros.
Ao girarmos a **Figura 1** em torno do segmento AD, girando 360°, obtemos o sólido que aparece na **Figura 2**.

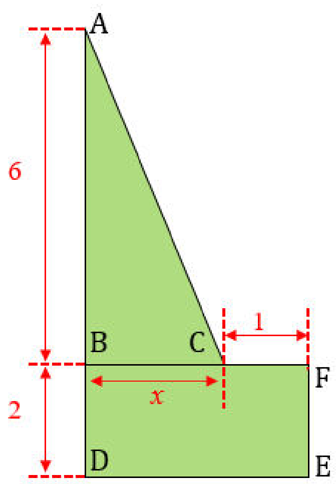


Figura 1

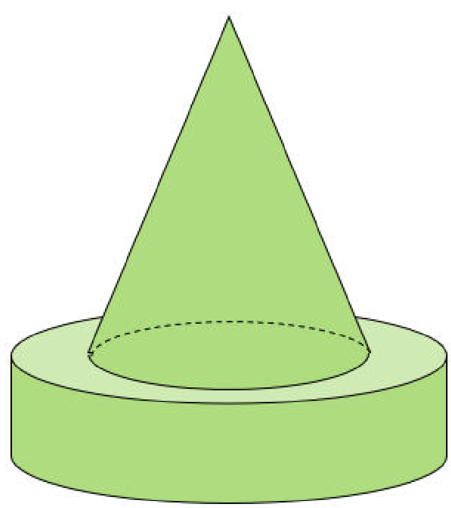


Figura 2

Considerando o cone e o cilindro que compõem o sólido mostrado na **Figura 2**, pergunta-se:
(a) Para que valores de x o volume do cone será menor que o volume do cilindro?
(b) O que podemos concluir a partir da resposta do item anterior?

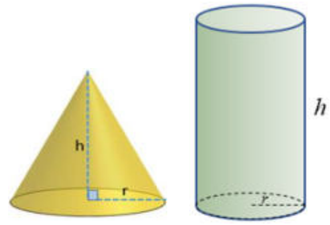
Lembretes

Volume de um cilindro circular reto cujo comprimento da altura é h e o comprimento do raio da base é r:

$$\boxed{Volume = \pi\, r^2 h}.$$

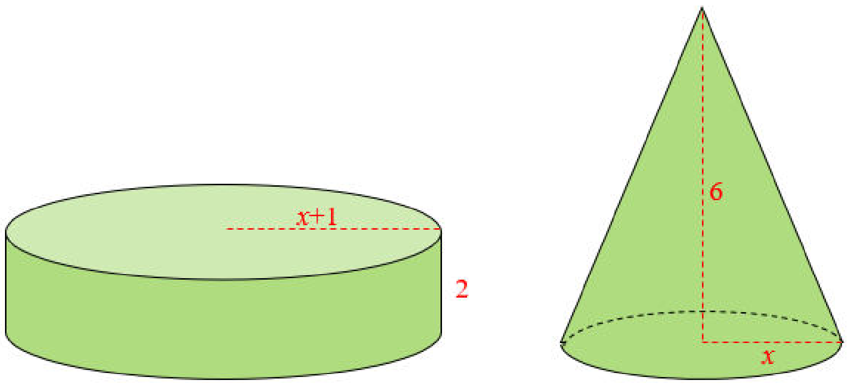
✏ Volume de um cone circular reto cujo comprimento da altura é h e o comprimento do raio da base é r:

$$\boxed{Volume = \frac{\pi r^2 h}{3}}.$$



Solução

Observemos separadamente o cilindro e o cone que compõem o sólido de revolução ilustrado na **Figura 2**.



De acordo com as fórmulas indicadas nos **Lembretes**, podemos calcular os volumes $V_{c\,i}$ do cilindro e $V_{c\,o}$ do cone como se segue:

$$\begin{aligned} V_{c\,i} &= \pi\, r^2 h \\ V_{c\,i} &= \pi \cdot (x+1)^2 \cdot 2 \\ V_{c\,i} &= 2\pi \cdot \left(x^2 + 2x + 1\right) \\ V_{c\,i} &= 2\pi x^2 + 4\pi x + 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{c\,o} &= \frac{\pi r^2 h}{3} \\ V_{c\,o} &= \frac{\pi \cdot x^2 \cdot 6}{3} \\ V_{c\,o} &= \pi \cdot x^2 \cdot 2 \\ V_{c\,o} &= 2\pi x^2 \end{aligned}$$

(a) Para determinarmos para quais valores de x o volume do cone será menor que o volume do cilindro, vamos impor a condição $V_{c\,o} < V_{c\,i}$. Vejamos:

$$\begin{aligned} & V_{c\,o} < V_{c\,i} \\ & \cancel{2\pi x^2} < \cancel{2\pi x^2} + 4\pi x + 2\pi \\ & 0 < 4\pi x + 2\pi \\ & -2\cancel{\pi} < 4\cancel{\pi}\, x \\ & \frac{-2}{4} < x \\ & x > \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

Mas observe que x denota uma medida de comprimento, logo representa um valor positivo. Assim, o volume do cone será menor que o volume do cilindro para todos os valores reais de x tais que $\boxed{x > 0}$.

(b) Como no contexto do problema x é uma medida de comprimento, e portanto sempre positiva, para os sólidos definidos no problema o volume do cone será **SEMPRE** menor que o volume do cilindro.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.