.Problema para ajudar na escola: Um padrinho

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

(**XXX OPM** – Adaptado) Um número p é padrinho de um número a se p é produto de números cuja soma é a.
Por exemplo, 36 é um padrinho de 11 porque

- $36 = 1 \times 3 \times 3 \times 4$ e $11 = 1 + 3 + 3 + 4$,

mas também é um padrinho de 10, de 12 e de 13, já que

- $36 = 3 \times 3 \times 4$ e $10 = 3 + 3 + 4$;
- $36 = 6 \times 6$ e $12 = 6 + 6$;
- $36 = 9 \times 4$ e $13 = 9 + 4$.

Qual é o número máximo de zeros com que pode terminar um padrinho de 2018?

Solução

Suponhamos que p seja um padrinho de 2018 que termine com o maior número possível de zeros, digamos n zeros. Assim:

$$p = z\underbrace{00\cdots0}_{n\text{ zeros}} = z \times \left(\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n\text{ fatores}}\right)$$

sendo z um número que não termina por zero.
Como p é padrinho de 2018, então 2018 é escrito como soma de fatores de p. Dessa forma, para produzirmos cada um dos n fatores 10 de p, precisaremos de parcelas iguais a 10 ou $(2+5)$ para 2018. Mas perceba que $2+5=7<10$; portanto, ao escrevermos 2018, se utilizarmos parcelas iguais a $(2+5)$ para produzir fatores 10 nos produtos que produzem os padrinhos, o número de parcelas será maior do que se utilizarmos parcelas iguais a 10. Isso significa que teremos mais fatores 10 nos produtos que produzem os padrinhos, e consequentemente mais zeros.

Não entendeu? Veja se com um exemplo você entende o que estamos afirmando:

- $23 = 10 + 10 + 3$; logo, $10 \times 10 \times 3 = 300$ é um padrinho de 23 que termina com dois zeros.
- $23 = (2+5) + (2+5) + (2+5) + 2$; logo, $(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times 2 = 2000$ é um padrinho de 23 que termina com três zeros.

Então, utilizaremos o máximo de parcelas iguais a $(2+5)$ para obtermos 2018. Se esse máximo for m, isso corresponde a escrevermos 2018 na forma

- $2018 = 7m + k$, com $k < 7$. $\quad (i)$

Para reforçar que estamos no caminho certo para resolvermos o problema, observe que, da condição (i), segue que

$2018 = 7m + k$, com $k < 7$
$2018 = 2m + 5m + k$, com $k < 7$

$$2018 = \left(\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{m\text{ parcelas}}\right) + \left(\underbrace{5 + 5 + \cdots + 5}_{m\text{ parcelas}}\right) + k, \text{ com } k < 7. \qquad (ii)$$

Logo, segue de (ii), que

$$p_1 = \left(\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{m\text{ fatores}}\right) \times \left(\underbrace{5 \times 5 \times \cdots \times 5}_{m\text{ fatores}}\right) \times k \text{ , onde } k < 7.$$

é um padrinho de 2018 que termina com o maior número possível de zeros. Com isso, concluímos que $n = m$ e isso resolve o nosso problema, já que a afirmação (i) garante que m e k são respectivamente o quociente e o resto da divisão euclidiana de 2018 por 7. (Observe que m mede quantas vezes o número 7 cabe em 2018.)

Como

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 7 \\ \hline 2 & 288 \end{array}$$

concluímos que o número máximo de zeros com que pode terminar um padrinho de 2018 é $\boxed{288}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Participou da discussão o Clube: **Faapers**.