.Problema para ajudar na escola: Um múltiplo de 99

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Sejam x e y algarismos tais que $n=35218xy$ é um número divisível por 99.
Determine n.

(Aqui, a notação $35218xy$ não indica um produto e sim a representação de um número de sete algarismos no sistema decimal.)

Lembretes

Critério de divisibilidade por 9: Para um número natural z ser divisível por 9, é necessário e suficiente que a soma de seus algarismos seja divisível por 9.

Critério de divisibilidade por 11: Para um número natural z ser divisível por 11, é necessário e suficiente que a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par seja um número divisível por 11.

Para rever esses e outros critérios de divisibilidade, clique **AQUI**.

Solução 1

Para que o número $n=35218xy$ seja divisível por 99, n deve ser divisível simultaneamente por 9 e por 11.

➤ Por um dos **Lembretes**, o número $n=35218xy$ será divisível por 9 se $3+5+2+1+8+x+y=\boxed{19+x+y}$ for divisível por 9. Mas $19+x+y=18+(x+y+1)$ e 18 já é divisível por 9; assim, basta que $x+y+1$ seja divisível por 9 para que $19+x+y$ também o seja.
Por outro lado, observe que x e y são algarismos; assim, $0\leqslant x\leqslant 9$ e $0\leqslant y\leqslant 9$, donde $0\leqslant x+y\leqslant 18$ e, consequentemente, $1\leqslant x+y+1\leqslant 19$.
Assim, precisamos que $x+y+1$ seja divisível por 9, mas $1\leqslant x+y+1\leqslant 19$. Bom, agora ficou mais fácil pois, entre os números naturais de 1 a 19, só temos dois múltiplos de 9: 9 e 18. Com isso, $x+y+1=9$ ou $x+y+1=18$, donde,

$$x+y=8 \qquad \text{ou} \qquad x+y=17. \qquad (i)$$

➤ Utilizando o outro **Lembrete**, vemos que o número $n=35218xy$ será divisível por 11 se $(y+8+2+3)-(x+1+5)=\boxed{y-x+7}$ for divisível por 11.
Mas x e y são algarismos; assim, $0\leqslant x\leqslant 9$ e $0\leqslant y\leqslant 9$, donde $-9\leqslant -x\leqslant 0$ e $0\leqslant y\leqslant 9$.
Dessa forma, $-9\leqslant y-x\leqslant 9$, ou seja, $-2\leqslant y-x+7\leqslant 16$.
Note que os únicos múltiplos de 11 de -2 a 16 são $0=0\times 11$ e $11=1\times 11$ e, com isso, $y-x+7=0$ ou $y-x+7=11$, donde,

$$y-x=-7 \qquad \text{ou} \qquad y-x=4. \qquad (ii)$$

Por (i), poderíamos ter $x+y=17$; mas essa soma ocorre apenas se um dos algarismos for o 8 e o outro for o 9 e para esses valores as igualdades obtidas em (ii) não são satisfeitas.
Dessa forma, considerando (i) e (ii) ficamos com apenas duas possibilidades:

"$x+y=8$ e $y-x=-7$"
ou
"$x+y=8$ e $y-x=4$".

Somando as duas primeiras equações, obtemos $2y=1$, o que não pode ocorrer já que y é um número natural. Portanto, sobra-nos apenas a segunda possibilidade.
Somando as equações $x+y=8$ e $y-x=4$, obtemos $2y=12$, donde temos que $y=6$. Substituindo esse valor em qualquer uma das duas equações, obtemos que $x=2$.
Com isso, temos que o único número da forma $n=35218xy$ divisível por 99 é $\boxed{n=3521826}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Uma solução bem rápida, mas que depende mais de uma "sacada" do que de conhecimento propriamente dito, é observar que $35218xy=3521800+xy$, ou seja, xy é o número de dois algarismos que devemos somar a 3521800 para obter um múltiplo de 99.
Observemos, o resto da divisão de 3521800 por 99.

$$\begin{array}{r|l} 3521800 & 99 \\ \cline{2-2} 73 & 35573 \end{array}$$

Note que 3521800 não é divisível por 99 porque sobram 73 unidades de resto. Então, se somarmos $99-73=26$ ao número 3521800, obteremos um número divisível por 99.
Assim $3521800+26=\boxed{n=3521826}$ é divisível por 99.
O próximo múltiplo de 99 será $3521826+99=3521925$ que já não será da forma $35218xy$.
O múltiplo de 99 anterior a 3521826 será $3521826-99=3521727$ que igualmente não é da forma $35218xy$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.