



.Problema para ajudar na escola: Um múltiplo de 45



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(Junior Mathematical Olympiad 2010) Um número de oito dígitos $M = \overline{aaaabbbb}$ é múltiplo de 45. Quais os possíveis valores para o algarismo a ?



Ajuda

Divisibilidade por 45: Um número natural n é divisível por 45 se, e somente se, n for divisível simultaneamente por 5 e 9.

Observação importante

Cuidado com uma possível generalização desse critério: observe que 36 é divisível simultaneamente por 4 e 6, mas 36 não é divisível por $24 = 4 \cdot 6$.

Isso acontece porque o máximo divisor comum entre 4 e 6 é diferente de 1.

Uma generalização correta seria a seguinte:

- Sejam a e b números naturais tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$.
Um número natural n é divisível por $a \cdot b$ se, e somente se, n for divisível simultaneamente por a e b .

Solução

Pelo critério de divisibilidade apresentado na **Ajuda**, o número natural M é múltiplo de 45 se, e somente se, M for múltiplo simultaneamente de 5 e 9. Vamos então analisar essas duas hipóteses separadamente.

- Como M é múltiplo de 5, então o último algarismo de M é 0 ou 5. Com isso,
 - $b = 0$ ou $b = 5$. (i)
- Como M é múltiplo de 9, então a soma dos dígitos de M deve ser um múltiplo de 9, ou seja, $a + a + a + a + b + b + b + b = 4(a + b)$ é divisível por 9. Como 4 não tem fator comum com 9, então, para que $4(a + b)$ seja divisível por 9, é necessário que $a + b$ seja divisível por 9. Mas a e b são algarismos e $a \neq 0$ (Lembre-se de que a é o primeiro algarismo de um número com oito dígitos.), então $0 < a + b \leq 18$. Dessa forma, para que $a + b$ seja divisível por 9 temos duas possibilidades:
 - $a + b = 9$ ou $a + b = 18$. (ii)

Dessa maneira, analisando simultaneamente (i) e (ii), temos que:

- Se $b = 0$, então $a = 9$ ou $a = 18$. No entanto, a é um algarismo; conseqüentemente, a não pode ser 18.
- Se $b = 5$, então $a = 4$ ou $a = 13$. Observe que a é um algarismo; logo, a também não pode ser 13.

Pelo exposto, vemos que existem apenas dois valores possíveis para a : $a = 9$ ou $a = 4$.

Participou da discussão o Clube **OCTETO MATEMÁTICO**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

