.Problema para ajudar na escola: Um loteamento

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Uma grande imobiliária comprou um terreno por $R\$\,1\,100\,000,00$ para fazer um loteamento.
Depois de algum tempo, essa imobiliária consegue vender quase todos os lotes com um lucro de $R\$\,20,00$ por metro quadrado, recuperando assim o valor pago pelo terreno.
Sabendo que os lotes não vendidos somam $500\,m^2$, quantos metros quadrados tem o terreno que a imobiliária comprou?

AJUDA

As raízes da equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$ são dadas por

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde a,b,c são números reais, com $a\neq 0$, e $\Delta=b^2-4ac$.

Solução

Vamos denotar por:

► x a medida em m^2 da área do terreno que a imobiliária comprou por $R\$\,1\,100\,000,00$ para fazer o loteamento;

► p o preço em reais pago pela imobiliária por m^2 do terreno.

Com isso, podemos traduzir matematicamente as informações dadas no problema da seguinte forma:

- **Dados sobre a compra**: A imobiliária pagou p reais por m^2 e a medida do terreno é $x\,m^2$.
  Então, $\boxed{1\,100\,000=px}$, ou seja,

$$p = \frac{1\,100\,000}{x}. \qquad (i)$$

- **Dados sobre a venda**: A imobiliária conseguiu recuperar o dinheiro que gastou com a compra, vendendo a área que comprou menos $500\,m^2$, com um lucro de $R\$\,20,00$ por m^2. Assim,

$$1\,100\,000 = (x - 500)(p + 20). \qquad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii), segue que:

$$1\,100\,000 = (x - 500)\left(\frac{1\,100\,000}{x} + 20\right)$$
$$\cancel{1\,100\,000} = \cancel{1\,100\,000} + 20x - \frac{550\,000\,000}{x} - 10\,000$$
$$20x - \frac{550\,000\,000}{x} - 10\,000 = 0$$
$$20x^2 - 550\,000\,000 - 10\,000x = 0$$
$$x^2 - 500x - 27\,500\,000 = 0$$
$$x^2 - \left(5 \cdot 10^2\right)x - \left(275 \cdot 10^5\right) = 0.(iii)$$

Para obter o(s) valor(es) de x, vamos resolver a equação do segundo grau (iii).

De acordo com a fórmula de resolução de uma equação do segundo grau, as raízes dessa equação podem ser assim calculadas:

$$x = \frac{-\left(-5 \cdot 10^2\right) \pm \sqrt{\left(-5 \cdot 10^2\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-275 \cdot 10^5\right)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \cdot 10^2 \pm \sqrt{25 \cdot 10^4 + 1\,100 \cdot 10^5}}{2}$$

$$x = \frac{5 \cdot 10^2 \pm \sqrt{25 \cdot 10^4 + 11 \cdot 10^7}}{2}$$

$$x = \frac{5 \cdot 10^2 \pm \sqrt{10^4 \cdot \left(25 + 11 \cdot 10^3\right)}}{2}$$

$$x = \frac{5 \cdot 10^2 \pm 10^2 \cdot \sqrt{11\,025}}{2}$$

$$x = \frac{5 \cdot 10^2 \pm 105 \cdot 10^2}{2}.$$

Temos, então, duas raízes para a equação (iii) :

$$x_1 = \frac{5 \cdot 10^2 + 105 \cdot 10^2}{2} = \frac{110 \cdot 10^2}{2} = 5\,500,$$

$$x_2 = \frac{5 \cdot 10^2 - 105 \cdot 10^2}{2} = \frac{-100 \cdot 10^2}{2} = -5\,000.$$

Como x é uma medida de área, $x > 0$; logo, a raiz x_2 não nos convém.

Portanto, o valor de x conveniente para o problema é $x = 5\,500$.

Dessa forma, o terreno que a imobiliária comprou tem $\boxed{x = 5\,500}$ metros quadrados.

Embora não seja solicitado no problema, podemos completar facilmente as informações com relação ao loteamento:

- Área total do loteamento: $\boxed{5\,500\,m^2}$.
- Preço em reais pago pela imobiliária por m^2 do terreno: $p = \dfrac{1\,100\,000}{x} = \dfrac{1\,100\,000}{5\,500} = \boxed{R\$\,200,00}$.

- Preço em reais do m^2 vendido pela imobiliária: $p+20=\boxed{R\$\,220,00}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.