

JOSSARA BAZÍLIO DE SOUZA BICALHO

**UM ESTUDO SOBRE POLIEDROS E  
ATIVIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA:  
GEOMETRIA DA BOLA DE FUTEBOL E PIPA TETRAÉDRICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2013**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

B583e  
2013

Bicalho, Jossara Bazílio de Souza, 1977-

Um estudo sobre poliedros e atividades para o ensino de matemática: geometria da bola de futebol e pipa tetraédrica / Jossara Bazílio de Souza Bicalho. – Viçosa, MG, 2013. viii, 68 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Simone Maria de Moraes.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 60-61.

1. Matemática (Ensino médio). 2. Ensino. 3. Geometria sólida. 4. Poliedros. 5. Software educacional. 6. Cabri-geometre (Programa de computador). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 510.076

JOSSARA BAZÍLIO DE SOUZA BICALHO

**UM ESTUDO SOBRE POLIEDROS E  
ATIVIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA:  
GEOMETRIA DA BOLA DE FUTEBOL E PIPA TETRAÉDRICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 15 de março de 2013.

---

Marco Antônio Escher

---

Mercio Botelho Faria

---

Simone Maria de Moraes  
(Orientadora)

*A minha mãe, dona Ceci,  
sempre presente  
(in memoriam)*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me manter firme na fé de que eu alcançaria essa vitória.

A meu pai, Milton; a meus irmãos, Mariza e Vinícius; a meu esposo Wagner; a meus filhos João Vítor e Júlia, pelo apoio e amor incondicional e pela compreensão das ausências.

A meus colegas de PROFMAT: Alexandre, Antônio Carlos, Bruno, Fabrício, Juliana Chaves, Juliana Elvira, Júnior, Keyla, Marcelo, Márcio, Mônica, Patrick, Vandrê, Vanessa e Vicente, pela convivência enriquecedora.

A meu coordenador José Fernandes, pelo incentivo e colaboração. A meus colegas de trabalho, especialmente aos professores Silvino e José Silvino, pela parceria no PROFMAT. A meus alunos, pela participação nos experimentos e à direção do Instituto Federal de Minas Gerais, *campus* São João Evangelista, pelo suporte.

A SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), nas pessoas dos professores Elon Lages Lima e Marcelo Viana, pela idealização desse Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), uma oportunidade significativa para os professores brasileiros da Educação Básica.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo apoio financeiro.

A Universidade Federal de Viçosa (UFV), nas pessoas do coordenador do Mestrado Profissional em Matemática, professor doutor Allan de Oliveira Moura e de todos os professores do Departamento de Matemática, pela adesão ao PROFMAT.

Aos membros da banca, professores doutores Marco Antônio Escher e Mercio Botelho Faria, pelas preciosas sugestões.

E um agradecimento especial a minha orientadora, professora doutora Simone Maria de Moraes, pelo empenho e pelas valiosas contribuições a este trabalho. Obrigada!

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Um Estudo Sobre Poliedros</b>	<b>6</b>
1.1 Sólidos Geométricos . . . . .	6
1.2 Poliedros Convexos e não Convexos . . . . .	8
1.3 Teorema de Euler para Poliedros . . . . .	9
1.4 Poliedros Regulares e Semi-Regulares . . . . .	13
1.4.1 Poliedros de Platão . . . . .	19
1.4.2 Poliedros Arquimedianos . . . . .	21
<b>2 Experimento “Geometria da Bola de Futebol”</b>	<b>26</b>
2.1 O Problema da Fabricação de Bolas . . . . .	27
2.1.1 A Bola de Futebol a partir de um Sólido Platônico . . . . .	27
2.2 Gerando o Icosaedro Truncado no <i>Cabri 3D</i> . . . . .	29
2.3 Truncamento de Poliedros no <i>software</i> “Pletora de Poliedros” . . . . .	31
2.4 Atividade a partir do Problema da Fabricação de Bolas . . . . .	33

---

<b>3</b>	<b>Experimento “Pipa Tetraédrica, de Alexander Graham Bell”</b>	<b>37</b>
3.1	Sólidos Geométricos Semelhantes . . . . .	38
3.1.1	Uma Situação-Problema . . . . .	38
3.2	O Princípio da Similitude . . . . .	41
3.3	Construindo a Pipa Tetraédrica . . . . .	43
3.4	Questionário para Avaliação da Atividade . . . . .	45
3.5	Relação entre a Pipa Tetraédrica e a Pirâmide de Sierpinski . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Cartilha para o Professor</b>	<b>53</b>
	<b>Considerações Finais</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>62</b>

# Resumo

BICALHO, Jossara Bazílio de Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2013. **Um Estudo sobre Poliedros e Atividades para o Ensino de Matemática: Geometria da Bola de Futebol e Pipa Tetraédrica.** Orientadora: Simone Maria de Moraes.

Esta dissertação é dedicada à apresentação de duas atividades didáticas para a abordagem dos conteúdos de Matemática no Ensino Médio: “Poliedros” e “Sólidos Semelhantes”. A primeira delas se refere ao uso de *softwares* de Geometria Dinâmica para desenvolver e apresentar a ideia matemática relacionada à fabricação dos modelos de bolas de futebol, a partir da Copa de 1970. O *software* comercial “CABRI 3D” e o *software* gratuito “Pletora de Poliedros” são utilizados como ferramentas para a exploração das propriedades dos poliedros platônicos e arquimedianos, bem como para a investigação da validade da relação de Euler para poliedros convexos e não convexos. A segunda atividade, a “Pipa Tetraédrica”, trata de uma proposta de trabalho com material concreto e de manipulação, através da oficina de construção do artefato idealizado por Alexander Graham Bell e da exploração das propriedades de figuras semelhantes.

# Abstract

BICALHO, Jossara Bazílio de Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2013. **A Study on Polyhedra and Activities for Teaching Math: Geometry of Soccer Ball and Kite Tetrahedral.** Adviser: Simone Maria de Moraes.

This dissertation is dedicated to the presentation of two didactic activities to the approach the content in High School Mathematics: “Polyhedra” and “Solids Similar”. The first refers to the use of Dynamic Geometry software to develop and present the mathematical idea related to the manufacturing of models of soccer balls from the 1970 World Cup. The commercial software “CABRI 3D” and freeware “Plethora of Polyhedra” are used as tools for exploring the properties of polyhedra platonic and Archimedean as well as the investigation of validity of relation Euler for convex and nonconvex polyhedra. The second activity, the Kite Tetrahedral is a work proposal with concrete material and of manipulation, through construction workshop artifact designed by Alexander Graham Bell and exploiting the properties of similar figures.

# Introdução

A realidade do ensino de Matemática nas escolas brasileiras de Educação Básica foi a inspiração para este trabalho. Avaliações nacionais e internacionais apontam que o ensino de Matemática e as estratégias didáticas precisam ser reavaliadas.

O PISA (*Programme for International Student Assessment*) - Matemática, um exame de conteúdo e competências básicas, indica que o país teve avanços substanciais alcançados entre 2000 e 2009. Porém, em sua última edição (2009), o Brasil ficou com a lamentável 53<sup>a</sup> colocação entre 65 países participantes.

Os dados desse exame apontam ainda que mais de 90% dos estudantes de todas as regiões do país estão abaixo da média dos países que lideram o PISA.

Encontramos no texto *Sobre o Ensino da Matemática no Brasil*, da professora Suely Druck, ex-diretora acadêmica da *OBMEP* (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), a seguinte indagação:

Em países como Coréia do Sul, Cuba e Finlândia, a maioria dos alunos consegue resolver problemas complexos de Matemática, enquanto apenas 10% dos alunos brasileiros atingem o nível mais avançado de proficiência matemática (Laboratório Latino-Americano de Avaliação da Qualidade da Educação (Llece) da Unesco.)

O que será que acontece nas escolas desses países e que não acontece nas escolas brasileiras?

A resposta é simples: em geral, não acontece nada de interessante nas aulas de Matemática das escolas brasileiras; não se desperta, assim, qualquer tipo de curiosidade ou interesse dos alunos pela disciplina. ([11, p.1])

Sobre os diferentes tipos de problemas no ensino e na aprendizagem da Matemática nas escolas brasileiras, Faingulernt e Nunes apontam:

Alunos desmotivados para estudar matemática, e professores repetindo antigos modelos, e ensinando, ainda hoje, uma matemática de forma automatizada e descontextualizada, e não integrada a outras áreas de conhecimento. Professores desmotivados e com dificuldade de selecionar problemas que despertem nos alunos a vontade de resolvê-los e os conhecimentos necessários para que esses alunos apliquem os conceitos matemáticos a outras situações, além de muitas outras dificuldades. ([13, p.5])

Sobre a importância do ensino de Matemática, os presidente e vice-presidente da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), professores Hilário Alencar e Marcelo Viana, ressaltam:

A educação básica em Matemática é o instrumento disseminador da competência para o pensamento quantitativo nas sociedades modernas. Como tal é de importância estratégica tanto para a formação de uma cidadania consciente quanto para geração de capital humano qualificado, indispensável para a competição no mundo contemporâneo. ([1, p.2])

Mas há um outro lado da Matemática no país a se destacar: desde 1954 o Brasil participa da “União Internacional de Matemática” (*International Mathematical Union* - IMU), entidade que congrega 66 nações e tem por objetivo fomentar a cooperação internacional nesta área do conhecimento.

Em 2005, o país foi promovido ao Grupo IV da IMU, o que significa que quanto à qualidade da pesquisa em Matemática estamos ao lado da Coreia do Sul, Espanha, Holanda, Índia, Suécia e Suíça, ficando atrás apenas de Alemanha, Canadá, China, Estados Unidos, França, Inglaterra, Israel, Itália, Japão e Rússia, países que pertencem ao Grupo V.

A situação desta ciência no país é muito peculiar, pois o excelente desempenho da pesquisa matemática brasileira não se reflete no ensino de Matemática, principalmente nas séries iniciais e particularmente nas escolas públicas.

A busca de soluções para diminuir o abismo entre a qualidade da pesquisa e a qualidade do ensino de Matemática nos ensinos fundamental e médio no Brasil tem sido foco de discussões de foros de Educação e de Ensino em Matemática. Na verdade, as ações objetivas que podem melhorar a qualidade do ensino de Matemática no país passam por políticas públicas de valorização da carreira docente e de qualificação de profissionais do ensino, pela melhoria na formação e nas condições de

trabalho, pela adoção de atividades de ensino nas salas de aulas que despertem a curiosidade e o interesse dos alunos pela disciplina, entre outras.

Algumas medidas tem sido tomadas por Secretarias de Educação, por pesquisadores da área de Educação e de Ensino de Matemática, por professores e outros atores do tema. Por exemplo, podemos destacar cursos de aperfeiçoamento, a Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), desenvolvimento de materiais de multimídia por grupos de pesquisa em Ensino de Matemática, entre outros.

Fainguelernt e Nunes afirmam: “avaliações nacionais, entre elas SAEB<sup>1</sup> e ENEM<sup>2</sup>, revelam que são grandes as dificuldades dos alunos do ensino médio em relação ao campo da geometria; as maiores dificuldades são enfrentadas pelos alunos no estudo da geometria espacial”.([13, p.114]). Por um lado, temos professores de Matemática que admitem que a Geometria Espacial é um tema difícil de ser ensinado. Por outro, grande parte dos alunos do ensino médio também concordam em dizer que a Geometria 3D é um tema difícil de ser aprendido. Por que tanta dificuldade no ensino e aprendizagem desse tema?

Uma das principais razões está relacionada à questão da representação figural dos objetos tridimensionais no plano. De fato, um objeto representado no papel não corresponde à formação da imagem mental que se tem do objeto. Por exemplo, sabemos que todas as faces de um cubo são quadradas, mas representamos algumas de suas faces por paralelogramos. Sabemos que a base de um cone circular é um círculo, mas a representamos por uma elipse. Retas reversas não se intersectam, mas as suas representações no plano são retas concorrentes ou paralelas. As faces de uma pirâmide triangular estão em 4 planos distintos, mas numa folha de papel são representadas num único plano. Portanto, há um conflito entre o que é visto no espaço e o que é representado em um suporte bidimensional. Em geral, há perda de informações quando se passa de um objeto tridimensional para sua representação bidimensional. Uma outra razão para as dificuldades dos alunos é a fraca experiência que geralmente têm no ensino básico com a manipulação de objetos sólidos e maquetes e com a exploração de situações espaciais. ([4, p.50])

Na expectativa de contribuir com o ensino de Matemática, nessa dissertação apresentamos e analisamos propostas de atividades alternativas que sirvam de

---

<sup>1</sup>Sistema de Avaliação da Educação Básica

<sup>2</sup>Exame Nacional do Ensino Médio

suporte a professores na condução das aulas de Geometria Espacial com foco no estudo de poliedros e de figuras semelhantes.

No capítulo 1 fazemos um levantamento dos principais conceitos envolvendo a introdução ao estudo de poliedros. Apresentamos definições e demonstramos dois resultados importantes: “Teorema de Euler para Poliedros”, mais conhecido como “Relação de Euler” ( $V - A + F = 2$ ), e a prova apresentada no livro XIII dos “Elementos” de Euclides (cerca de 300 a.C.) sobre a existência de apenas cinco poliedros regulares, segundo Lima e outros. ([15, p.240]). Também mencionamos a relação histórica e matemática entre os sólidos platônicos e arquimedianos.

Nos dois capítulos seguintes, apresentamos duas propostas de atividades para a abordagem dos conteúdos “Poliedros” e “Sólidos Semelhantes”, no Ensino Médio.

Assim, no capítulo 2, utilizamos *softwares* de Geometria Dinâmica para desenvolver e apresentar a ideia matemática relacionada com a fabricação dos modelos de bolas de futebol, a partir da Copa de 1970. Exploramos as propriedades dos poliedros platônicos e arquimedianos, através dos *softwares* “CABRI 3D” e “Pletora de Poliedros” e analisamos a validade da relação de Euler para poliedros convexos e não convexos.

Já no capítulo 3 desenvolvemos a atividade da “Pipa Tetraédrica”, uma proposta de trabalho com material concreto e de manipulação, através da oficina de construção do artefato idealizado por Alexander Graham Bell e da exploração das propriedades de figuras semelhantes.

Nas atividades descritas, procuramos explorar o desenvolvimento das competências necessárias ao estudo da Geometria Espacial. Sobre isto, Bortollossi, no seu trabalho *Os Sólidos Platônicos*, publicado na página *Conteúdos Digitais para o Ensino de Matemática e Estatística*, afirma:

Visualizar é uma das habilidades mais importantes para o desenvolvimento do aluno com relação aos conceitos da geometria espacial. Contudo, um professor típico dispõe (e usa) apenas o livro texto como ferramenta didática para o ensino deste assunto. Sendo mídias bidimensionais, a página de um livro ou o quadro-negro não são os instrumentos mais adequados para se treinar visualização. O emprego de materiais concretos se põe como uma excelente alternativa para explorar o assunto. Outra abordagem promissora é o uso de recursos computacionais: modelos tridimensionais podem ser manuseados virtualmente na tela de um computador, construindo assim uma ponte entre a representação planar (quando o sólido está estático na tela do computador) e o modelo concreto (quando o usuário interage com o sólido). ([5])

O uso das ferramentas computacionais mencionadas no capítulo 2 vão de encontro às demandas sociais de implantação de tecnologias na educação básica brasileira e de mudança nos processos de ensino.

O computador aqui funciona como um recurso facilitador do processo de ensino e aprendizagem da matemática, aliando a esse recurso uma proposta que tem como eixo metodológico a resolução de problemas. Diante do computador, o aluno é levado a elaborar e testar hipóteses, simular situações, socializar e argumentar ideias, inferir propriedades, justificar seus raciocínios e validar suas próprias conclusões. ([13, p.25])

Finalmente, no capítulo 4 apresentamos algumas sugestões para o professor de como inserir as atividades “Geometria da Bola” de Futebol” e “Pipa Tetraédrica” em sua prática docente e realizar uma abordagem diferenciada e inovadora de conteúdos matemáticos.

# Capítulo 1

## Um Estudo Sobre Poliedros

Neste capítulo, faremos um apanhado dos principais conceitos envolvendo “Poliedros”, a partir da conceituação de “Sólidos Geométricos”. Será apresentada e demonstrada a “Relação de Euler” ou “Teorema de Euler para Poliedros”, bem como a prova de Euclides sobre a existência de apenas cinco poliedros regulares. Consideramos que este será o instrumental necessário para a compreensão dos experimentos que serão descritos nos capítulos 2 e 3: “Geometria da Bola de Futebol” e “Pipa Tetraédrica”.

Alguns aspectos históricos também serão abordados, tais como sobre Platão, Arquimedes e seus poliedros.

As figuras deste capítulo foram retiradas das seguintes páginas eletrônicas:

<http://stor.pt.cx/feiramatik/2010/10/11/solidos-de-revolucao-3/>

<http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html>

[http://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lido\\_de\\_Arquimedes](http://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lido_de_Arquimedes)

<http://www.veraviana.net/antiprismas.html>

<http://www.eb23-anadia.rcts.pt/ProjectoTurmas/ProjMatematica5F/>

### 1.1 Sólidos Geométricos

**Definição 1.1** *Um sólido geométrico é uma região do espaço que é delimitada por uma superfície fechada por um número finito de linhas, que formam faces, que são polígonos.*

Dentre os sólidos, há dois tipos que se destacam, pelo seu interesse: os **poliedros** e os **sólidos de revolução**.

Neste capítulo, vamos estudar os sólidos poliédricos. Na continuação, ilustramos alguns sólidos de revolução. Um **sólido de revolução** é o sólido obtido pela rotação de uma região plana em torno de uma reta chamada eixo de rotação.

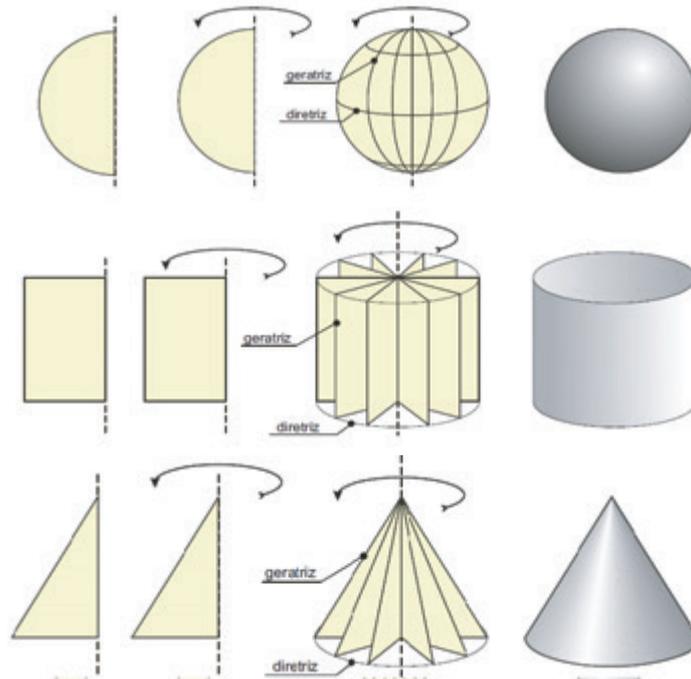


Figura 1.1: Exemplos de sólidos de revolução

**Observação 1.2** *Em alguns textos de geometria espacial, sólidos geométricos são definidos como sendo uma porção finita do espaço ilimitado por superfícies planas e curvas. No entanto, em qualquer dicionário da língua portuguesa encontraremos a definição de sólido como sendo “algo que tem consistência, maciço, firme ...”. Porém, estes mesmos livros denominam a esfera, o cone e outros objetos ociosos de sólidos e apresentam planificações de poliedros, que também são sólidos.*

*Na verdade, o que se deve distinguir nestas definições é a noção de sólido (superfície maciça) e a da superfície (“casca do sólido”, a superfície do sólido).*

*Assim, na verdade, o que devemos esclarecer é que, ao estudar **sólidos** estamos estudando suas **superfícies**.*

## 1.2 Poliedros Convexos e não Convexos

Nesta seção, vamos estudar uma classe muito importante de sólidos: os **poliedros**. A seguir, apresentamos a definição de poliedro segundo Lima e outros ([15, p. 233]).

**Definição 1.3** *Um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados **faces** tais que:*

- (i) *Cada lado dos polígonos é também um lado de um, e apenas um, outro polígono.*
- (ii) *A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma **aresta** do poliedro e cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.*
- (iii) *É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice, ou seja, cruzando apenas arestas.*

*Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de **interior** do poliedro.*

**Observação 1.4** *A união do poliedro com seu interior constitui o que chamamos de um **sólido**. Um poliedro é “oco”, enquanto que um sólido é “maciço”.*

Classe importante de poliedros é a classe dos poliedros convexos. Para defini-los, necessitamos primeiro definir conjuntos convexos.

**Definição 1.5** *Um conjunto  $\mathcal{C}$ , do plano ou do espaço, é **convexo** se, dados dois pontos quaisquer do conjunto, tivermos o segmento de reta que os une inteiramente contido em  $\mathcal{C}$ .*

**Definição 1.6** *Um poliedro  $\mathcal{P}$  é **convexo** se  $\mathcal{P}$  é um **conjunto convexo**. Se um poliedro não é convexo dizemos que é **não convexo**.*

**Observação 1.7** *Podemos ver que, em um poliedro convexo, qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, corta o poliedro em, no máximo, dois pontos.*

*Um poliedro convexo sempre está contido em um dos semi-espacos determinado por um plano que contenha uma de suas faces.*

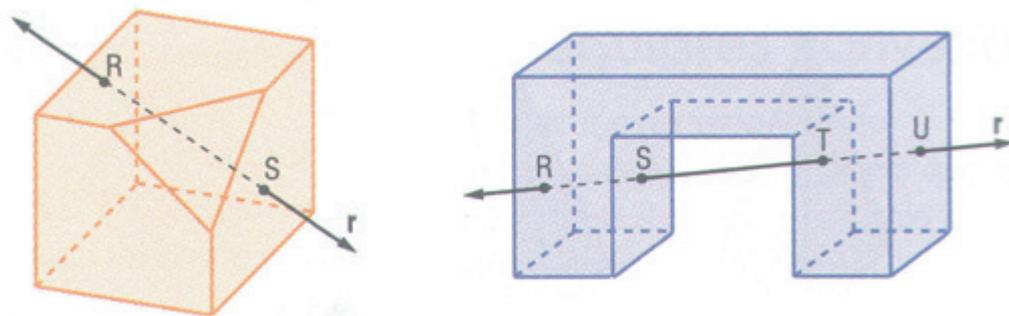


Figura 1.2: Um poliedro convexo e um não convexo (Fonte: [10, p.207])

### 1.3 Teorema de Euler para Poliedros

A fórmula de Euler para poliedros foi descoberta em 1758. Na ocasião, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) escreveu uma carta para seu amigo, Christian Golbach (1690-1764), também matemático, relatando a descoberta de uma propriedade acerca de poliedros: se  $V$ ,  $A$  e  $F$  são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro, então a relação

$$V - A + F = 2$$

é válida para a classe de poliedros que são **homeomorfos** (“*tem a mesma forma*”) a uma esfera, ou seja, que podem ser deformados continuamente em uma esfera ([5]).

Esta fórmula ficou conhecida como “Fórmula de Euler” ou “Relação de Euler”, em homenagem ao matemático que a descobriu.

**Observação 1.8** *Veremos uma demonstração da fórmula de Euler para poliedros convexos. No entanto, a fórmula vale também para poliedros não convexos. Na figura abaixo, ilustramos um poliedro não convexo homeomorfo à esfera.*

Sobre a fórmula de Euler, Lima destaca:

O teorema de Euler tem sido ensinado, há décadas, em cursos de Geometria nas escolas secundárias. Ele tem características usuais que tornam um teorema atraente e popular: generalidade de validade, simplicidade de enunciado, demonstração elegante e inteligível. Além disso, é fácil ilustrá-lo com belos desenhos de poliedros, nos quais se constata visualmente que  $V - A + F = 2$ . ([16, p.69])

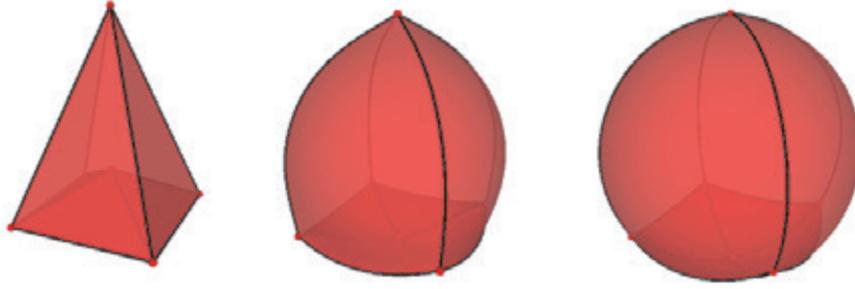


Figura 1.3: Deformação de um poliedro não convexo em uma esfera

**Teorema 1.9 (Teorema de Euler para Poliedros)** *Em todo poliedro convexo com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces, vale a relação*

$$V - A + F = 2.$$

A seguir, reproduzimos a demonstração que consta em Lima et al ([15, p.235]), uma adaptação da prova construída pelo professor Zoroastro Azambuja Filho e publicada na *Revista do Professor de Matemática* (RPM), número 3.

**Demonstração:** Iniciamos a demonstração calculando a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo  $P$ .

Numeramos as faces de 1 até  $F$  e seja  $n_k$  o gênero da  $k$ -ésima face ( $1 \leq k \leq F$ ). Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de gênero  $n$  é igual a  $\pi(n - 2)$  e que se um poliedro é convexo então todas as suas faces são polígonos convexos, assim a soma dos ângulos internos de todas as faces de  $P$  é dada pela expressão:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \cdots + \pi(n_F - 2)$$

ou ainda,

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - (2 + 2 + \cdots + 2)].$$

Ora, no primeiro parêntese, a soma dos números de lados de todas as faces é igual ao dobro do número de arestas e no segundo parêntese, a soma das  $F$  parcelas é igual a  $2F$ . Assim,

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F). \quad (1.1)$$

Vamos agora escolher uma reta  $r$  que não seja paralela a nenhuma das faces de  $P$ . Tomamos também um plano  $H$ , que não intersecta  $P$  e que seja perpendicular a  $r$ . Chamamos o plano  $H$  de *plano horizontal* e as retas paralelas a  $r$ , e portanto

perpendiculares a  $H$ , de *retas verticais*.

$H$  divide o espaço em dois semi-espços, um dos quais contém o poliedro  $P$ , que chamamos de semi-espço *superior* e dizemos que seus pontos estão acima de  $H$ .

Para melhor ilustrar nosso raciocínio, imaginaremos o sol brilhando a pino sobre o semi-espço superior de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto  $X$  do semi-espço superior corresponde um ponto  $X'$  em  $H$ , chamado *sombra* de  $X$ . A sombra de qualquer conjunto  $C$ , contido no semi-espço superior é, por definição, o conjunto  $C'$ , contido em  $H$ , formado pelas sombras dos pontos de  $C$ . Veja figura 1.4.

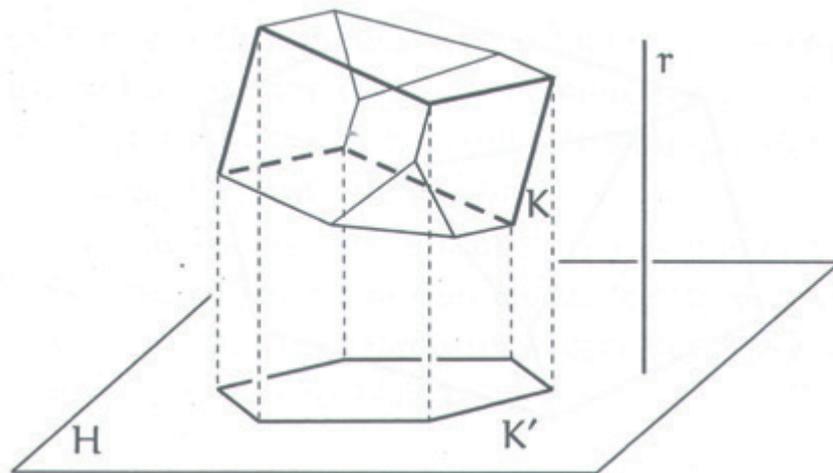


Figura 1.4: Região iluminada e região sombria (Fonte: [15, p.237])

Consideremos então a sombra  $P'$  do poliedro  $P$ . Como  $P$  é convexo, cada ponto de  $P'$  é sombra de um ou dois pontos de  $P$ . Ora, a sombra  $P'$  do poliedro  $P$  tem como contorno um polígono convexo  $K'$ , sombra de uma poligonal fechada  $K$  formada por arestas de  $P$ . Cada ponto de  $K'$  é sombra de um único ponto de  $P$ . A poligonal  $K$  é chamada de contorno aparente do poliedro  $P$ . Cada ponto interior  $P'$ , portanto não pertencente a  $K'$ , é sombra de exatamente dois pontos de  $P$ . Dados dois pontos de  $P$  que têm mesma sombra, ao mais alto, mais distante de  $H$ , chamaremos *ponto iluminado* e o mais baixo será chamado *sombrio*.

Depois dessas considerações, vamos calcular novamente a soma de todos os ângulos das faces de  $P$ , observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua sombra (ambos são polígonos de mesmo gênero).

Sejam:  $V_1$  o número de vértices iluminados,  $V_2$  o número de vértices sombrios e  $V_0$  o número de vértices do contorno aparente  $K$ . Então  $V = V_0 + V_1 + V_2$ , onde

$V_0$  é o número de vértices (e de lados) da poligonal  $K'$ , contorno de  $P'$ .

Consideremos então a sombra das faces iluminadas (figura 1.5).

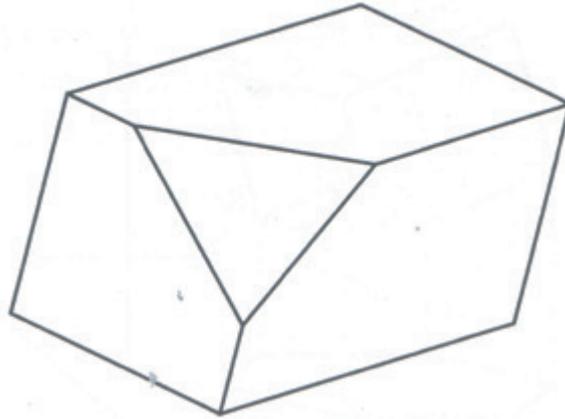


Figura 1.5: Sombra das faces iluminadas (Fonte: ([15, p.238])

A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com  $V_0$  vértices em seu contorno e  $V_1$  pontos interiores, sombra dos vértices iluminados de  $P$ . A soma de todos os vértices da figura anterior é:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi (V_0 - 2).$$

Por raciocínio inteiramente análogo, obtemos para a soma de todos os ângulos da sombra das faces sombrias,

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi (V_0 - 2).$$

Somando as duas igualdades acima, temos:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi (V_0 - 2) \\ &= 2\pi (V_1 + V_2 + V_0 - 2) \\ &= 2\pi (V - 2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Comparando 1.1 e 1.2 e dividindo por  $2\pi$ , resulta que  $A - F = V - 2$ , ou seja,

$$V - A + F = 2$$

como queríamos demonstrar. □

O número  $V - A + F$  é chamado **característica de Euler**. Portanto, podemos

afirmar que a característica de Euler dos poliedros convexos é 2.

A noção de característica de Euler foi generalizada por Poincaré para um poliedro de qualquer dimensão e hoje é conhecida como **característica de Poincaré-Euler**.

## 1.4 Poliedros Regulares e Semi-Regulares

Agora vamos definir poliedros regulares e semi-regulares, que são importantes para os nossos propósitos.

**Definição 1.10** *Um poliedro convexo é **regular** se todas as suas faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.*

Diante desta definição é natural o seguinte questionamento:

*“Existe algum poliedro que satisfaz a definição acima?”.*

Segundo Lima et al ([15, p.240]), na última proposição do Livro XIII dos *Elementos* de Euclides, demonstra-se que existem exatamente 5 poliedros desse tipo, que são denominados de **tetraedro regular**, com 4 faces triangulares; **cubo** ou **hexaedro regular**, com 6 faces quadradas; **octaedro regular**, com 8 faces triangulares; **dodecaedro regular**, com 12 faces pentagonais e **icosaedro regular**, com 20 faces triangulares. A figura 1.6 ilustra esses poliedros.

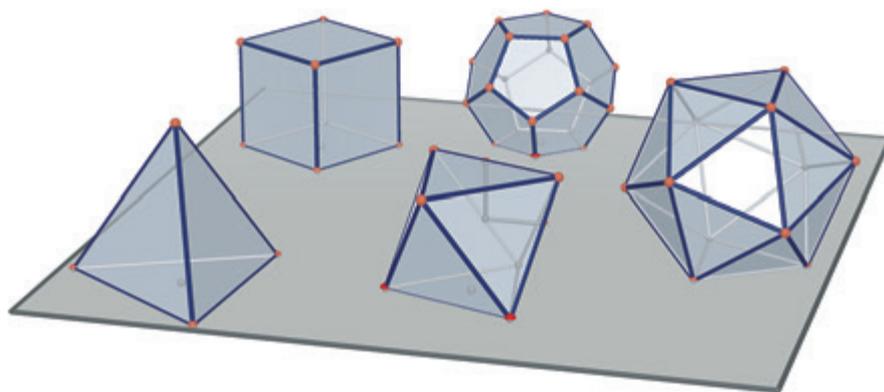


Figura 1.6: Os cinco poliedros regulares, gerados no *software* CABRI 3D

A seguir, apresentamos a explicação, retirada de [5], para a nomenclatura usada para identificar os poliedros regulares:

O sufixo *edro* vem da palavra grega *hédra*, que significa face. Os prefixos, também oriundos do grego, indicam a quantidade de faces de cada poliedro: *tetra* (4), *hexa* (6), *octa* (8), *dodeca* (12) e *icosa* (20). A palavra *cubo* vem do latim *cubu*, que significa estar deitado, estar estirado; repousar; estar deitado à mesa, e do grego *kýbos*.

Sobre a condição de existência dos poliedros regulares, Rabello discorre:

Como um ângulo poliédrico é medido pela soma dos ângulos planos formados pelos pares de arestas que convergem para um mesmo vértice, sua medida está limitada a  $360^\circ$ . Quando esta soma atinge este valor, o ângulo é plano.

Além disso, para que seja formado um ângulo poliédrico, é necessário que converjam para seu vértice, no mínimo, três arestas pertencentes a três faces adjacentes. No caso dos poliedros regulares, tais faces são, necessariamente, polígonos regulares.

Assim, teoricamente, os poliedros regulares poderiam ser construídos a partir da contiguidade de triângulos equiláteros, quadrados, hexágonos e demais polígonos regulares.

Se a medida de um ângulo poliédrico está limitada a  $360^\circ$ , é de se supor que o número de poliedros regulares deverá, também, ser limitado.

Agrupando faces de polígonos regulares a partir de um número mínimo de três e multiplicando a quantidade desses polígonos (faces) pela medida do seu ângulo interno, vamos constatar que, de fato, apenas cinco poliedros regulares poderão ser formados. ([19, p.27]).

Para fazermos a construção dos poliedros regulares a partir de polígonos regulares precisamos, primeiro, introduzir a noção de ângulo poliédrico.

**Definição 1.11** *Um ângulo poliédrico em um poliedro regular é o ângulo formado pelas arestas dos polígonos e o vértice do poliedro. A soma desses ângulos poliédricos é menor que  $360^\circ$ .*

Agora, vamos fazer a construção de poliedros regulares por agrupamento de vértices de um polígono regular.

**1º Caso:** Agrupando triângulos equiláteros:

- (a) 3 triângulos equiláteros:  $3 \times 60^\circ = 180^\circ (< 360^\circ)$ , então temos o tetraedro regular;

- (b) 4 triângulos equiláteros:  $4 \times 60^\circ = 240^\circ (< 360^\circ)$ , então temos octaedro regular;
- (c) 5 triângulos equiláteros:  $5 \times 60^\circ = 300^\circ (< 360^\circ)$ , então temos icosaedro regular;
- (d) 6 triângulos equiláteros:  $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ , então é impossível construir um poliedro regular.

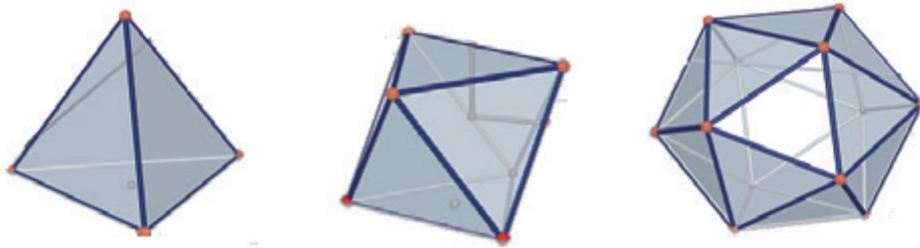


Figura 1.7: Poliedros regulares obtidos por agrupamento de triângulos.

Assim, podemos concluir que existem somente três poliedros regulares cujas faces são triângulos equiláteros.

**2º Caso:** Agrupando quadrados:

- (a) 3 quadrados:  $3 \times 90^\circ = 270^\circ (< 360^\circ)$ , então temos hexaedro regular ou cubo;
- (b) 4 quadrados:  $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ , então é impossível construir um poliedro regular.

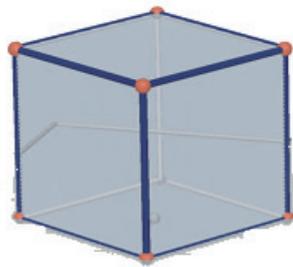


Figura 1.8: Poliedro regular obtido por agrupamento de quadrados.

Concluimos, então, que somente um poliedro regular pode ser formado por quadrados.

**3º Caso:** Agrupando pentágonos:

- (a) 3 pentágonos:  $3 \times 108^\circ = 324^\circ (< 360^\circ)$ , então temos dodecaedro regular;  
 (b) 4 pentágonos:  $4 \times 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$ , então é impossível construir um poliedro regular.

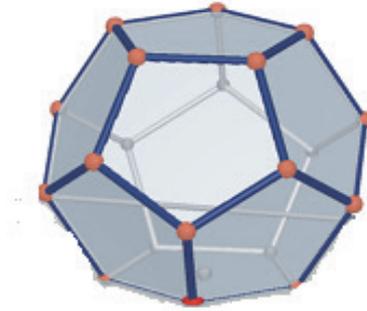


Figura 1.9: Poliedro regular obtido por agrupamento de pentágonos.

Logo, só há um poliedro regular que pode ser formado por pentágonos regulares.

Concluimos, de maneira construtiva, que existem apenas 5 poliedros regulares.

Agora, apresentamos a demonstração atribuída a Euclides, mencionada em [15, p.241], sobre a existência de poliedros regulares convexos.

**Teorema 1.12** *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{P}$  um poliedro regular convexo com  $n$  lados de cada face e  $p$  o número de arestas que concorrem em cada vértice. Então

$$2A = nF = pV \iff A = \frac{nF}{2} \quad \text{e} \quad V = \frac{nF}{p}.$$

Substituindo na relação de Euler, obtemos

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 \iff F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}.$$

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}.$$

Observemos que

$$2p + 2n - pn > 0 \iff \frac{2n}{n-2} > p.$$

Como  $p \geq 3$ , concluímos que  $n < 6$  e temos as seguintes possibilidades:

$$n = 3 \implies F = \frac{4p}{6-p} \implies \begin{cases} p = 3 \implies F = 4 & (\text{tetraedro}) \\ p = 4 \implies F = 8 & (\text{octaedro}) \\ p = 5 \implies F = 20 & (\text{icosaedro}) \end{cases}$$

$$n = 4 \implies F = \frac{2p}{4-p} \implies p = 3 \implies F = 6 \quad (\text{cubo})$$

$$n = 5 \implies F = \frac{4p}{10-3p} \implies p = 3 \implies F = 2 \quad (\text{dodecaedro})$$

□

**Definição 1.13** Um poliedro  $\mathcal{P}$  é *semi-regular* se:

- (i)  $\mathcal{P}$  é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo.
- (ii) Todos os vértices de  $\mathcal{P}$  são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice.
- (iii) Todo vértice de  $\mathcal{P}$  pode ser transformado em outro vértice por uma simetria do poliedro.

Os poliedros semi-regulares são classificados em **equiangulares** e **equifaciais**.

**Definição 1.14** Um poliedro é *equiangular* se seus ângulos poliédricos são todos iguais e as faces, polígonos regulares de mais de um tipo.

Um exemplo de poliedro equiangular é o *cuboctaedro* obtido de cortes por planos que passam pelos pontos médios das arestas que convergem para o mesmo vértice, cujas seções geradas são triângulos equiláteros iguais e as faces resultantes são quadrados menores e iguais. Este poliedro tem oito faces triangulares e seis faces quadradas como ilustrado na figura 1.10.

**Definição 1.15** Um poliedro é *equifacial* se suas faces são todas iguais, não necessariamente polígonos regulares, e seus ângulos poliédricos, também, não necessariamente iguais.

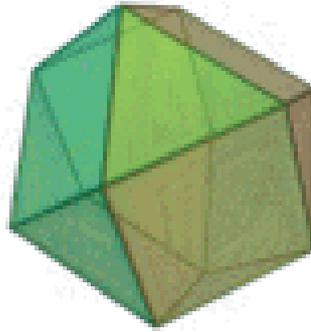


Figura 1.10: Cuboctaedro, um exemplo de poliedro equiangular.

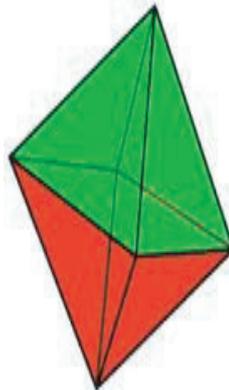


Figura 1.11: Poliedro equifacial, cujas faces são triângulos não equiláteros.

**Definição 1.16** Os poliedros que não podem ser classificados como regulares ou semi-regulares são chamados **poliedros multi-formes**. Dentre estes, há dois tipos que se destacam: os **prismas** e as **pirâmides**.

**Definição 1.17** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  planos distintos e paralelos,  $A_1A_2 \dots A_n$  um polígono em  $\alpha$  e  $B_1$  um ponto em  $\beta$ . consideremos  $B_2, B_3, \dots, B_n$  em  $\beta$  tais que  $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel \dots \parallel A_nB_n$ .

O poliedro cujas faces são os polígonos  $A_1A_2 \dots A_n$ ,  $B_1B_2 \dots B_n$  e os paralelogramos  $A_1A_2B_1B_2$ ,  $A_2A_3B_2B_3$ ,  $\dots$ ,  $A_{n-1}A_nB_{n-1}B_n$  e  $A_nA_1B_nB_1$  é chamado **prisma** de bases  $A_1A_2 \dots A_n$  e  $B_1B_2 \dots B_n$ .

Uma variação da construção do prisma regular é o **antiprisma** (figura 1.13). Um antiprisma é um poliedro com duas bases regulares paralelas e cujas faces laterais são triângulos equiláteros.

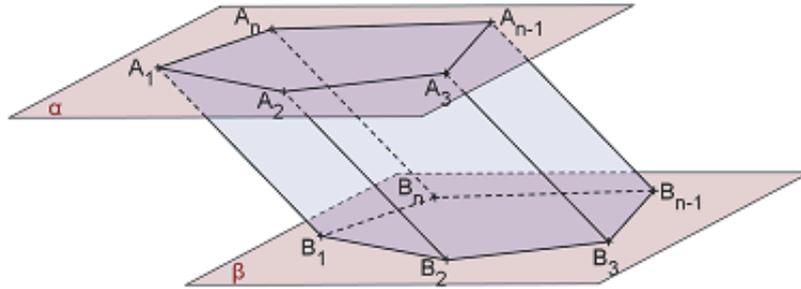


Figura 1.12: Um prisma (Fonte: [9, p.150])

Os vértices de um antiprisma são congruentes, porque neles intersectam-se o mesmo tipo e o mesmo número de faces. Porém, as suas arestas não o são, pois nas arestas laterais, intersectam-se triângulos equiláteros e nas arestas da base, intersectam-se o polígono da base e um triângulo equilátero.

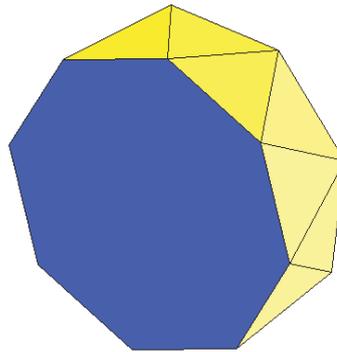


Figura 1.13: Um antiprisma.

**Definição 1.18** *Sejam  $A_1A_2 \dots A_n$  um polígono convexo em um plano  $\alpha$  e  $V$  um ponto externo a  $\alpha$ . Consideremos os segmentos  $\overline{VA_1}, \overline{VA_2}, \dots, \overline{VA_n}$ .*

*O poliedro cujas faces são o polígono  $A_1A_2 \dots A_n$  e os triângulos  $\triangle A_1A_2V, \triangle A_2A_3V, \dots, \triangle A_{n-1}A_nV$  e  $\triangle A_nA_1V$  é chamado **pirâmide** de base  $A_1A_2 \dots A_n$  e vértice  $V$ .*

### 1.4.1 Poliedros de Platão

Os poliedros regulares (figura 1.6) recebem um nome especial: **Poliedros de Platão**, numa referência ao filósofo grego fundador da *Academia*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Fundada em Atenas por volta de 387 a.C., era “uma instituição orientada por propósitos sistemáticos de investigação científica e filosófica”. [12, p. 131].

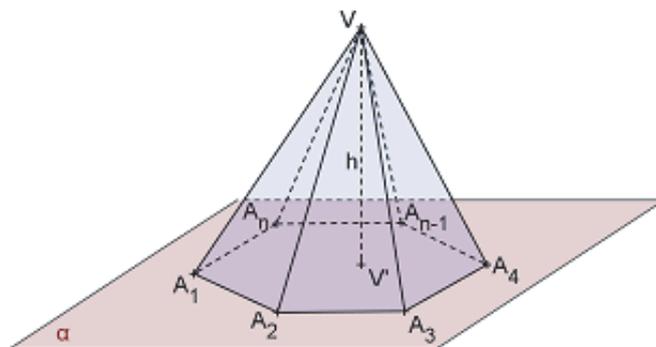


Figura 1.14: Uma pirâmide (Fonte: [9, p.157])

*Platão* (427 a.C - 347 a.C) viveu no século *IV* a.C., estudou Matemática com os pitagóricos Teodoro de Cirene e Arquitas. Em Eves encontramos a citação:

Quase todos os trabalhos matemáticos importantes do século *IV* a. C. foram feitos por amigos ou discípulos de Platão, fazendo da Academia o elo da matemática dos pitagóricos mais antigos com a posterior e duradoura escola de Alexandria.([12, p.131])

Já Carl Boyer afirma:

Embora o próprio Platão não tenha dado contribuição específica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade Matemática da época e guiava e inspirava seu desenvolvimento. ... seu entusiasmo pelo assunto fez com que se tornasse conhecido não como matemático mas como “criador de matemáticos”.([8, p. 58])

Platão defendia que a Matemática é uma forma importante de conhecimento, tendo por isso uma ligação com a realidade. Em sua obra *Timeu*, propõe que a *Geometria* é a chave para resolver os segredos do Universo. De fato, a importância que Platão deu à Geometria estava gravada à entrada da Academia: “*Que ninguém que ignore a geometria entre aqui*”.

Ao tetraedro, octaedro, icosaedro e cubo, Platão relacionou, respectivamente, fogo, ar, água e terra. O dodecaedro foi relacionado ao Universo. Ainda sobre essa associação, Eves ressalta:

Johann Kepler (1571-1630), mestre da Astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações de *Timeu*. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o

tetraedro abarca o menor volume para a sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume-superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro “elementos” e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentado quadradamente sobre uma de suas faces, tem a maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a instabilidade do ar. Finalmente associa-se o dodecaedro ao Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 seções. ([12, p.114]).

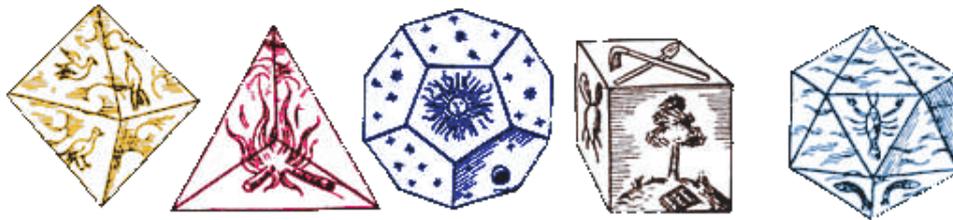


Figura 1.15: Octaedro - Ar, Tetraedro - Fogo, Dodecaedro - Universo, Cubo - Terra e Icosaedro - Água.

## 1.4.2 Poliedros Arquimedianos

**Definição 1.19** *Os sólidos de Arquimedes ou poliedros arquimedianos são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo. Todos os seus vértices são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice. Além disso, todo vértice pode ser transformado em outro vértice por uma simetria do poliedro.*

Esses sólidos foram estudados por *Arquimedes* (287 - 252 a.C.); no entanto, os escritos originais se perderam. O quinto livro de *Mathematical Collection*, do matemático grego *Pappus de Alexandria* (cerca de 290 a 350 d.C.), faz referência aos estudos de Arquimedes sobre esses sólidos.

**Observação 1.20** *1. Os prismas e os antiprismas de faces laterais regulares são, de acordo com a definição dada, arquimedianos. No entanto, os infinitos prismas e antiprismas não são em geral incluídos na família dos arquimedianos.*

2. Sem os prismas e antiprismas, a família dos arquimedianos é finita. A análise para obter esses finitos poliedros segue no mesmo caminho indicado na demonstração de Euclides para determinar os poliedros platônicos, porém, neste caso, pode ser muito mais morosa já que no mesmo vértice podem-se incluir polígonos regulares diferentes.

A figura 1.16, mencionada por Almeida ([2, p. 121]), ilustra os sólidos arquimedianos, segundo constam numa edição de 1864 do livro *Harmonices Mundi*, do matemático e astrônomo Johann Kepler (1571-1630). Na obra mencionada, Kepler demonstra a existência de apenas 13 sólidos arquimedianos e nomeia cada um dos sólidos.

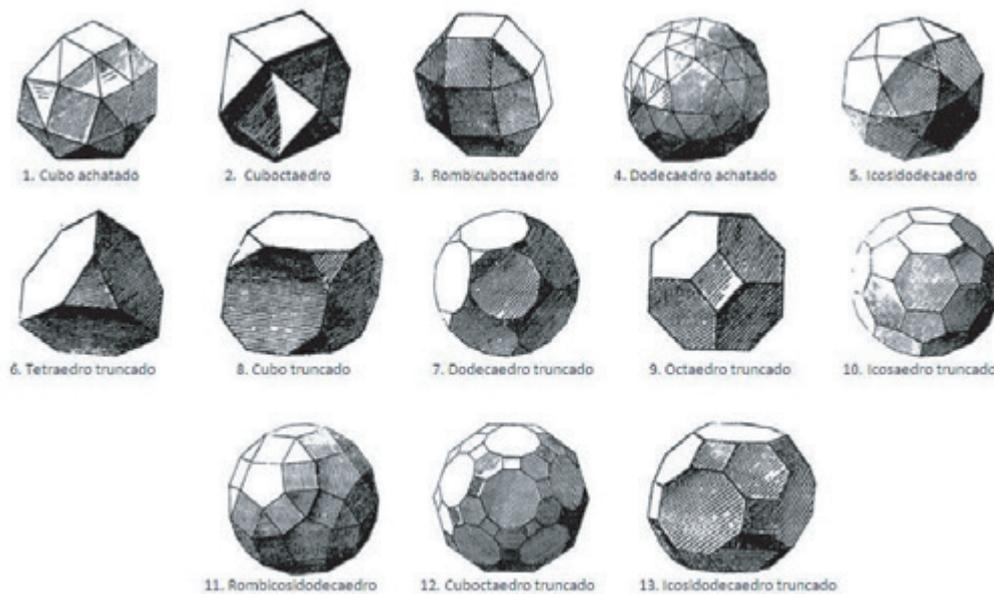


Figura 1.16: Sólidos Arquimedianos (Fonte: [2, p.121]).

Os sete sólidos arquimedianos ilustrados na figura 1.17 podem ser obtidos diretamente através de trincaturas<sup>2</sup> de um poliedro platônico.

Neste trabalho, estamos particularmente interessados na obtenção do icosaedro truncado e este será nosso assunto no próximo capítulo.

## Planificação de Poliedros

Finalizamos este capítulo apresentando a noção de planificação de um poliedro. Segundo [5], **uma planificação de um poliedro** é o resultado do processo de

<sup>2</sup>Sucessão de cortes

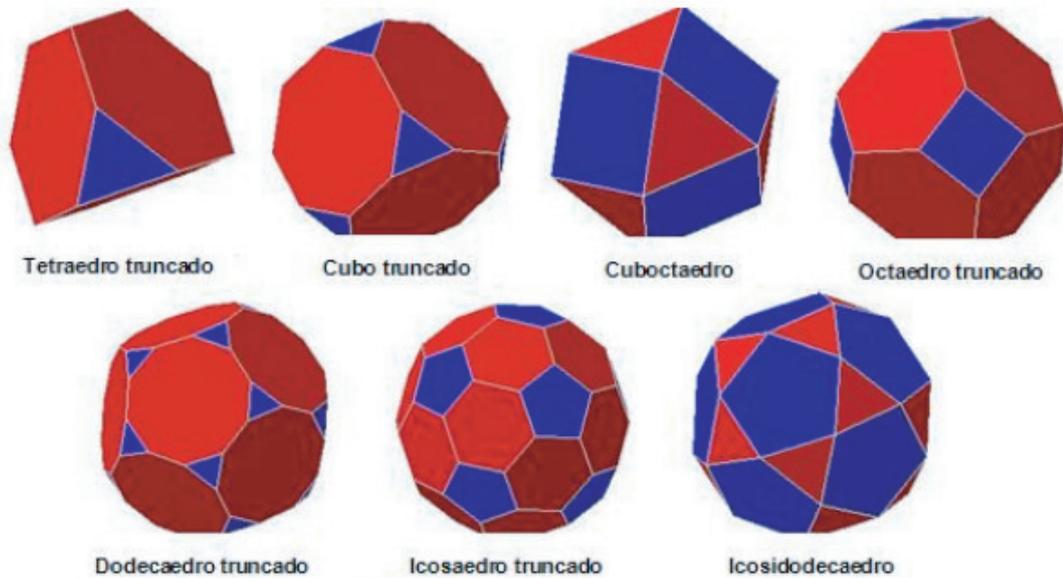


Figura 1.17: Sólidos Arquimedianos obtidos por truncamento (Fonte: [2, p.127]).

se cortar o poliedro ao longo de curvas e, então, abri-lo de forma que ele possa ser disposto sobre uma superfície plana, sem sobreposições e sem deformações das faces.

Uma **planificação por arestas** é aquela obtida por cortes ao longo das arestas do poliedro.

Pode-se verificar que o tetraedro regular possui 2 planificações diferentes, o cubo e o octaedro regular possuem 11 planificações diferentes, o icosaedro regular e o dodecaedro regular possuem 43380 planificações diferentes.

Ainda não se sabe se todo poliedro convexo possui uma planificação por arestas. Sabe-se, contudo, que existem poliedros não convexos que não possuem uma tal planificação.

A seguir, apresentamos algumas planificações dos poliedros platônicos.

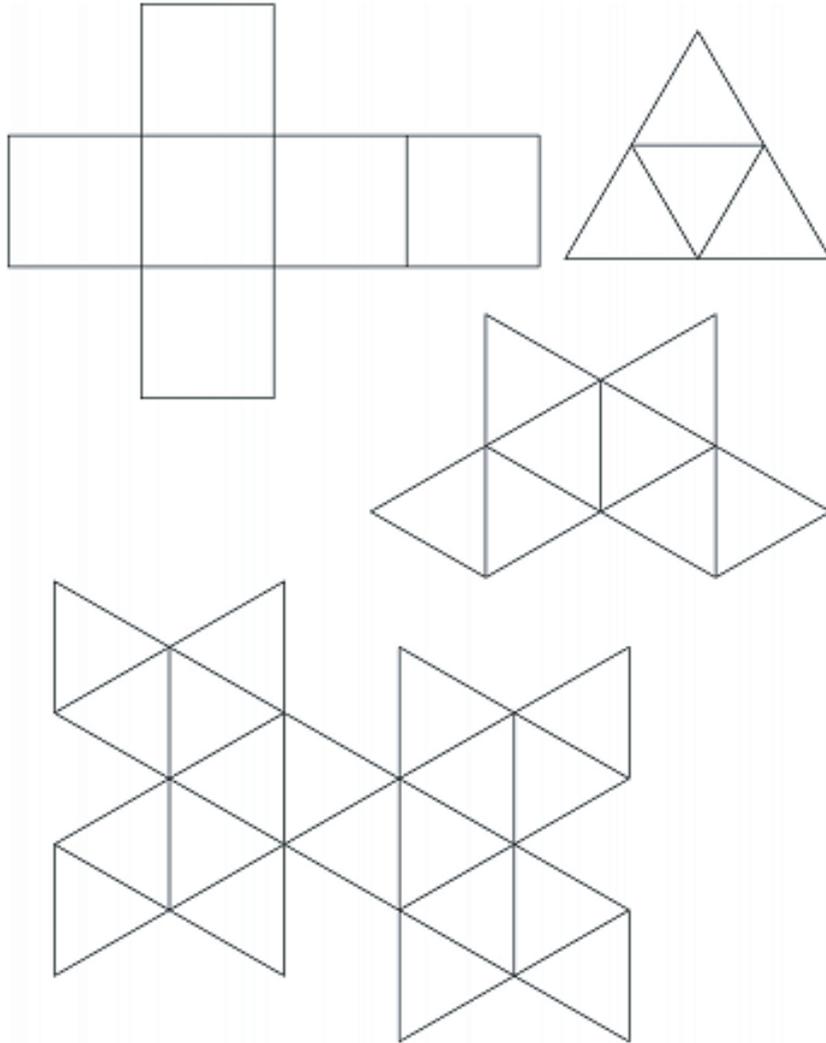


Figura 1.18: Modelos planificados de sólidos platônicos .(Fonte: [17]).

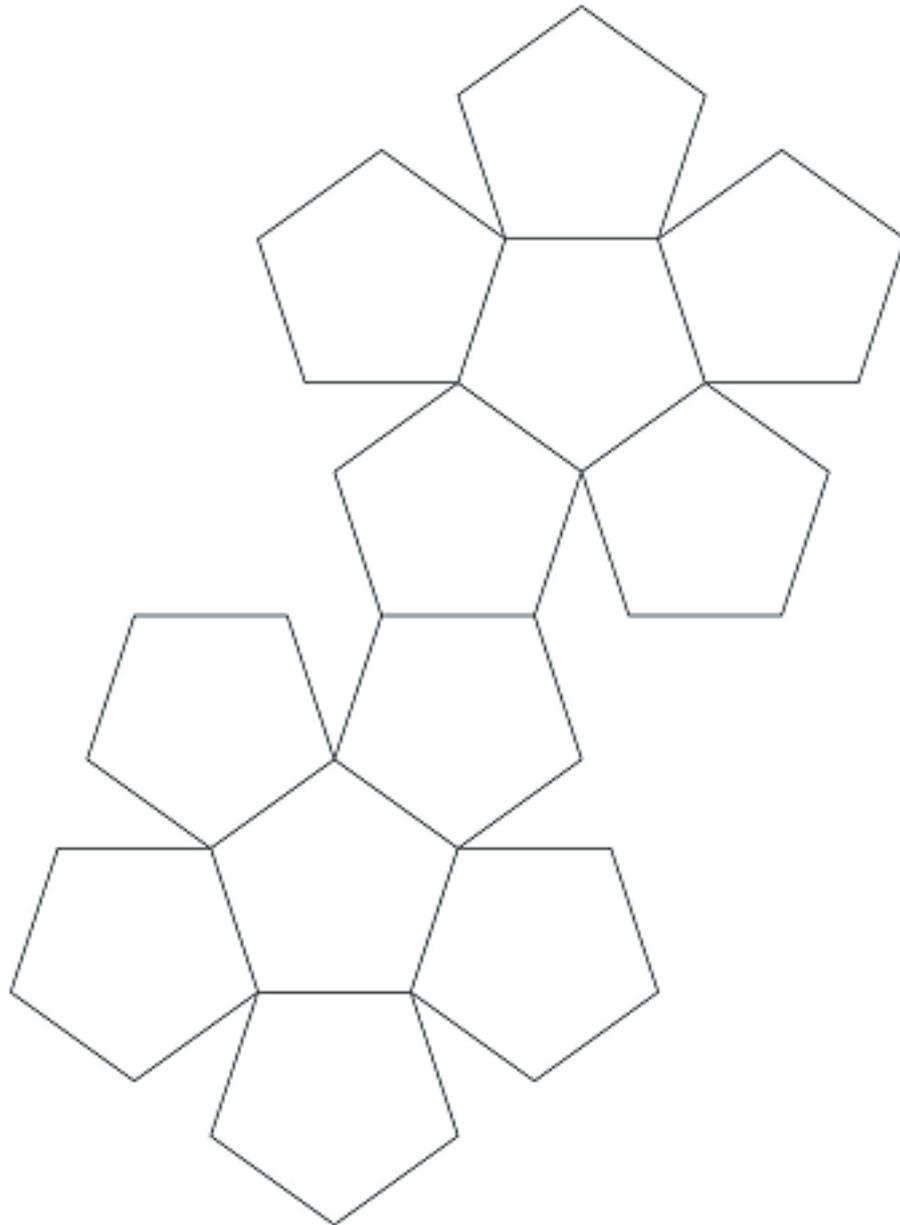


Figura 1.19: Modelo planificado do dodecaedro (Fonte: [17]).

## Capítulo 2

# Experimento “Geometria da Bola de Futebol”

Neste capítulo, apresentamos uma atividade didática para o ensino de Matemática relacionada à fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa de 1970 (figura 2.1), inspirada em um poliedro convexo, descoberto por Arquimedes.

Para isto, serão utilizados os *softwares* de geometria dinâmica<sup>1</sup> **CABRI 3D**<sup>2</sup> e **Pletora de Poliedros**<sup>3</sup> para explorar os principais conceitos sobre o tema “Poliedros” e “Relação de Euler”.

Algumas figuras deste capítulo foram retiradas das páginas eletrônicas descritas a seguir, enquanto as outras têm a fonte indicada na figura.

<http://www.ecologicalcork.com/2010/05/24/nova-bola-de-futebol-e-de-cortica>

<http://www.arrobazona.com/a-evolucao-das-bolas-de-futebol-da-copa-do-mundo>

<http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html>

---

<sup>1</sup>“O termo **Geometria Dinâmica** é usado para designar *softwares* interativos que permitem a criação e manipulação direta de figuras geométricas a partir de suas propriedades. Assim, vemos emergir uma maneira de ensinar e aprender geometria, a partir da exploração experimental que possibilita a passagem de uma figura à outra pelo deslocamento quase contínuo dos elementos, viável apenas em ambientes dinâmicos.” ([2, p.46]).

<sup>2</sup>*Software* de autoria de Eric Bainville e Jean-Marie Laborde, desenvolvido na Universidade de Joseph Fourier, na França. O manual completo, traduzido para o português, pode ser acessado através do endereço: <http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv212/user-manual-por-br.pdf>

<sup>3</sup>Desenvolvido pelos institutos de Matemática e Computação da Universidade Federal Fluminense (UFF), sob a responsabilidade do professor Humberto José Bortolossi. Pode ser acessado através do endereço <http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html>



Figura 2.1: Bola de futebol da Copa de 70.

## 2.1 O Problema da Fabricação de Bolas

Para desenvolvermos a atividade relacionada à fabricação de bolas de futebol, precisamos compreender o que é a *planificação* de um poliedro.

De acordo com o que vimos no capítulo anterior, as planificações por arestas indicam que os poliedros são formas espaciais que podem ser construídas a partir de superfícies planas, neste caso, polígonos. Ou seja, podemos dizer que os poliedros têm superfícies planificáveis.

Mas há formas espaciais que não são planificáveis, como é o caso da esfera.

Este era então um problema colocado para os fabricantes de bolas de todos os tipos. Se observarmos as bolas usadas nos diversos esportes, perceberemos que há mais de uma maneira para fabricá-las.

A figura 2.2 mostra a evolução das bolas de futebol das Copas do Mundo, de 1930 a 2010.

### 2.1.1 A Bola de Futebol a partir de um Sólido Platônico

Voltemos aos sólidos platônicos. O dodecaedro regular é um poliedro bastante “arredondado”. Entretanto, o icosaedro é mais arredondado. Assim, se tivéssemos uma bola icosaedral ela seria “bem arredondada”, mas não daria para jogar futebol com essa bola, devido aos seus bicos.

A ideia de cortar os “bicos” do icosaedro regular é interessante. Observe, na figura 2.4 como isto pode ser feito.

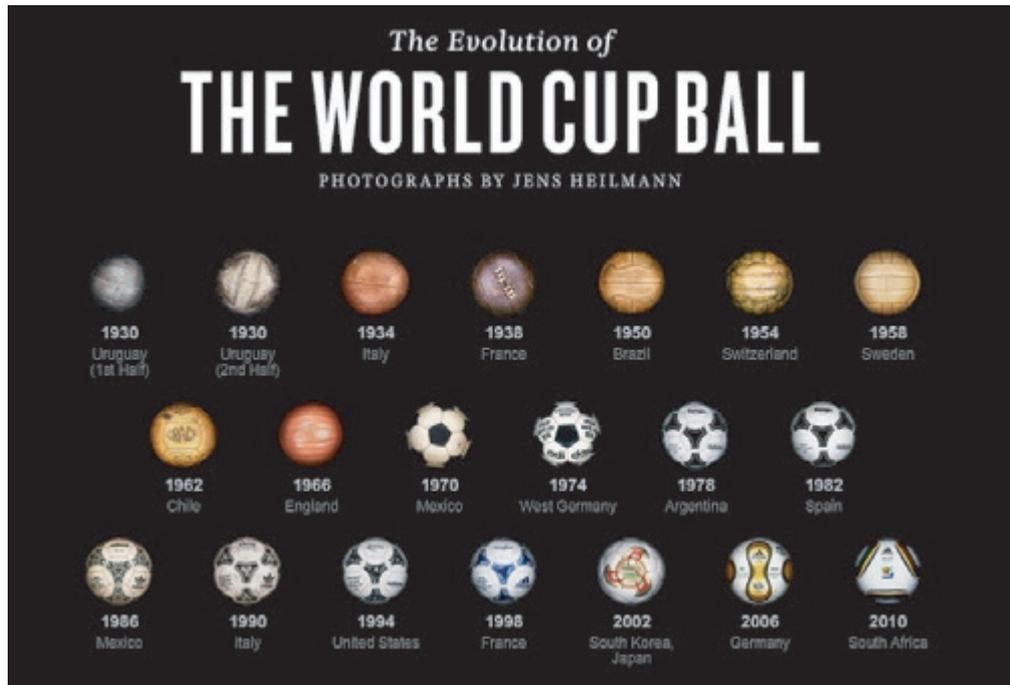


Figura 2.2: A evolução da bola da Copa do Mundo de Futebol.



Figura 2.3: Jogando futebol com o icosaedro. (Fonte: [14, p.252]).

O resultado é um poliedro com faces pentagonais e hexagonais, bem mais “arredondado” que o icosaedro. A esse poliedro damos o nome de **icosaedro truncado**, um dos sólidos arquimedianos.

Na prática, os polígonos das faces da bola de futebol são feitos de couro e costurados um no outro. Como o couro é um material deformável, ao injetar ar no seu interior, essa superfície infla, arredondando-se mais ainda e tornando-se praticamente esférica.

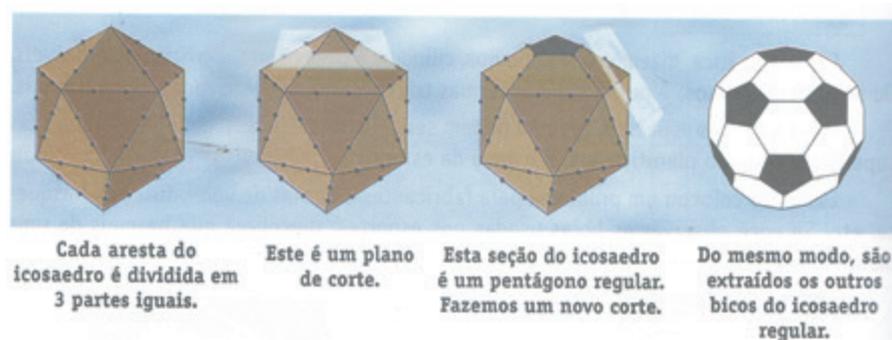


Figura 2.4: Cortando os bicos do icosaedro. (Fonte: [14, p.252]).

## 2.2 Gerando o Icosaedro Truncado no Cabri 3D

O processo de obtenção da bola de futebol a partir do icosaedro regular será proposto a seguir, como um experimento a ser realizado no *software* de geometria dinâmica Cabri 3D.

Descreveremos os passos para a obtenção do poliedro arquimediano icosaedro truncado, a partir do icosaedro platônico.

As principais ferramentas e recursos do *software* podem ser facilmente consultados no *Manual do Usuário*, disponível em

<http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv212/user-manual-por-br.pdf>

**Passo 1:** Iniciamos com a construção do icosaedro regular, através da opção correspondente na caixa de ferramentas *poliedros regulares* (veja figura 2.5). Em seguida, clicamos com o mouse no plano de base e em um ponto escolhido para centro da face, arrastamos até obter o tamanho desejado para o sólido e soltamos. Obtemos, assim, o icosaedro platônico. (Figura 2.6)

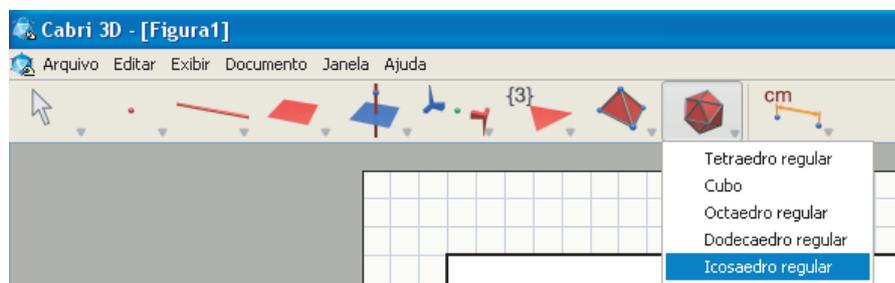


Figura 2.5: Ferramenta icosaedro regular.

**Passo 2:** A partir da construção do baricentro de uma face triangular e da aplicação do teorema de Tales, encontramos um terço da medida da aresta, como

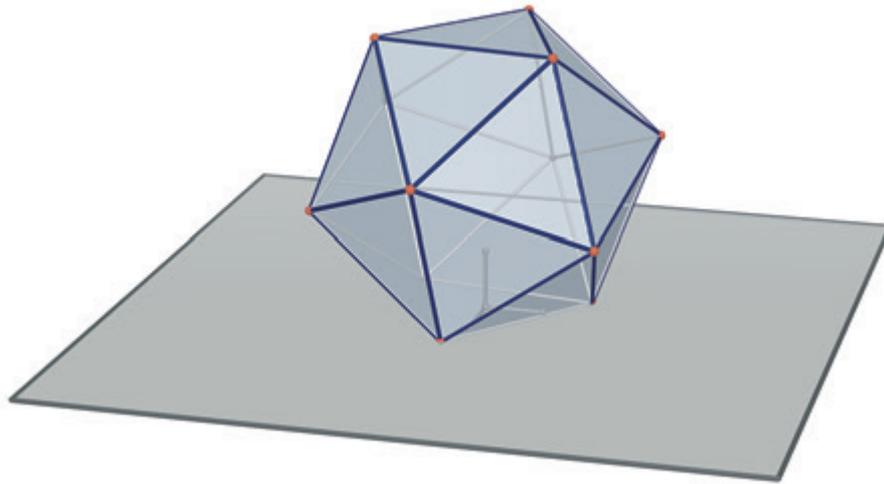


Figura 2.6: Icosaedro regular gerado no Cabri 3D.

ilustrado na figura 2.7. Repetindo esse processo para todas as arestas e com a opção *mostrar/esconder*, conseguimos o efeito ilustrado na figura 2.8.

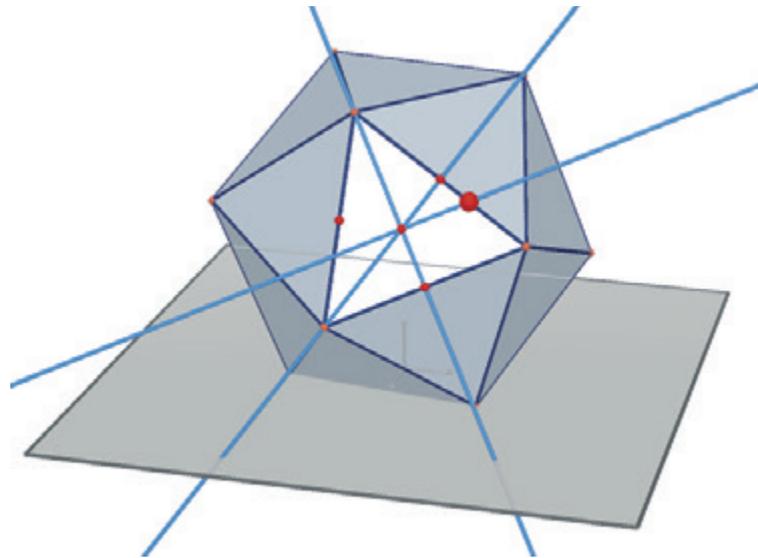


Figura 2.7: Processo de divisão das arestas do icosaedro em três partes iguais.

**Passo 3:** Agora, iniciamos o processo de *truncamento* do icosaedro, ou seja, eliminação dos cantos do poliedro. Para isso, deverá ser criado um *plano de seção* com a utilização da ferramenta *plano* e com a indicação de três pontos. Veja figura 2.9.

**Passo 4:** Acionando a ferramenta *recorte de poliedro*, eliminaremos o primeiro canto do icosaedro regular. Para isso, indicamos o plano obtido no passo 3

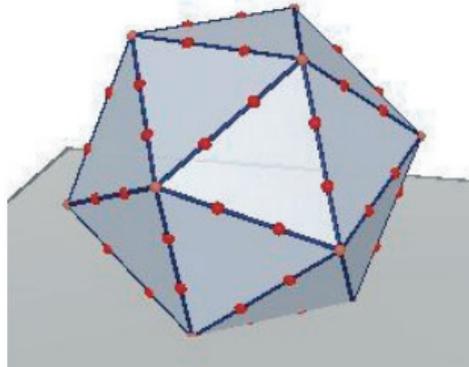


Figura 2.8: Arestas do icosaedro divididas em três partes iguais

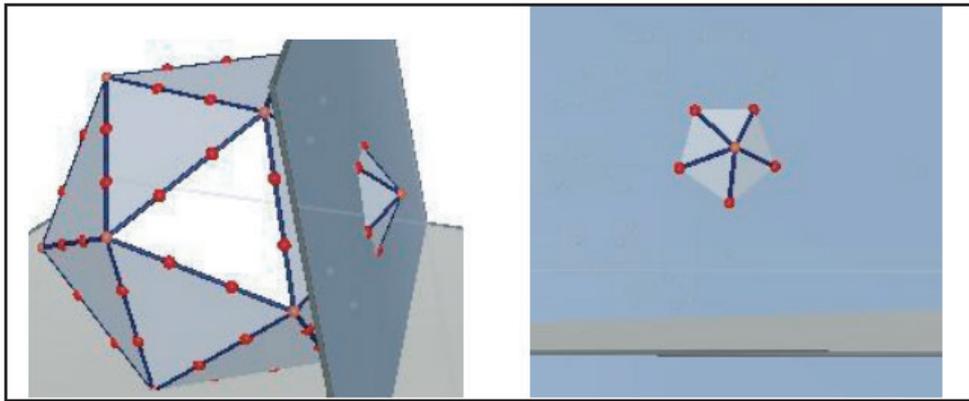


Figura 2.9: Plano de seção (icosaedro regular).

e o canto do icosaedro regular que contém o vértice desejado. Veja figura 2.10. Com o recurso *esconder/mostrar*, escondemos o plano, para facilitar a eliminação das outras “pontas” do icosaedro.

**Passo 5:** Repetimos os procedimentos descritos nos passos 3 e 4 para a eliminação dos outros cantos do icosaedro. A figura 2.11 ilustra o icosaedro truncado gerado no *Cabri 3D*.

## 2.3 Truncamento de Poliedros no software “Pletora de Poliedros”

O software *Pletora de Poliedros* é uma alternativa gratuita ao CABRI 3D em relação à operação de truncamento de um poliedro platônico. Produzido pelo *Conteúdos Digitais em Matemática para o Ensino Médio* (CDME), na Universidade

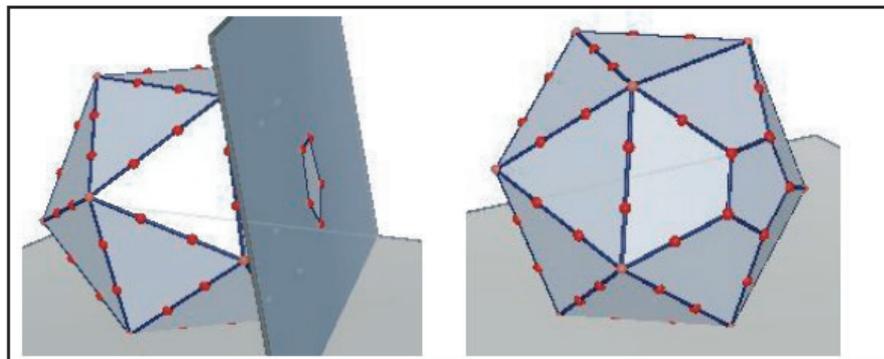


Figura 2.10: Eliminando as “pontas” do icosaedro regular.

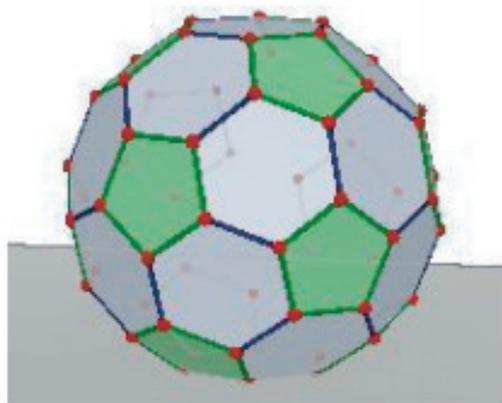


Figura 2.11: Icosaedro truncado.

Federal Fluminense (UFF), este *software* pode ser acessado livremente através da *internet*. Entre suas funcionalidades estão a visualização e manipulação de vários tipos de poliedros (os platônicos, os arquimedianos, convexos, não convexos, etc). Com este recurso, podemos novamente explorar a ideia matemática da fabricação da bola de futebol, a partir do poliedro platônico icosaedro regular.

Além da obtenção do icosaedro truncado, proporemos aqui a investigação da validade da relação de Euler para poliedros convexos e não convexos.

A figura 2.12 ilustra o processo de truncamento de um sólido platônico no *software*. Basta selecionar o poliedro regular, neste caso, o icosaedro e, em seguida, na aba *Modelar*, selecionar as opções *habilitar modelagem*, *truncar* e *preencher*. É preciso também escolher um valor para o *parâmetro* através da barra de rolagem.



Figura 2.12: Truncamento no *software* Pletora de Poliedros.

## 2.4 Atividade a partir do Problema da Fabricação de Bolas

As questões a seguir constituem um roteiro para o desenvolvimento da atividade de manipulação dos *softwares* de geometria dinâmica *Cabri 3D* e *Pletora de Poliedros*. Elas deverão ser respondidas pelos alunos durante a realização do experimento.

### Questão 1.

Pode existir algum poliedro com apenas duas faces? E com apenas 3 faces? Qual é o número mínimo de faces de um poliedro?

### Questão 2.

Existe um poliedro regular formado por pentágonos regulares. Seu nome é dodecaedro porque dodeca significa “doze” e ele tem doze faces. Ele pode ser montado com base na sua planificação.

Diga quantos vértices e arestas esse poliedro tem, usando o *software* CABRI 3D (ou Pletora de Poliedros).

**Sugestão:** Estabeleça uma estratégia de contagem e descreva-a.

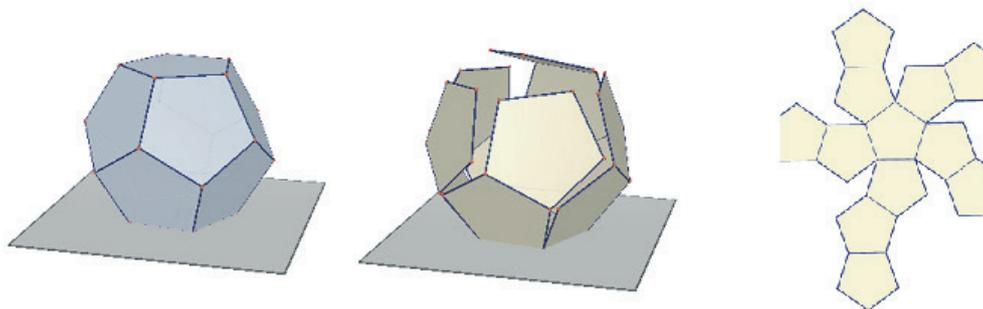


Figura 2.13: Dodecaedro aberto e planificado no CABRI 3D.

### Questão 3.

Usando o *software* **Cabri 3D** (ou **Plethora de Poliedros**), conte o número de vértices, arestas e faces dos outros sólidos platônicos e anote os resultados na tabela 2.1.

**Sugestão:** Para contar o número de faces mais facilmente, você pode planificar o sólido. Ambos os *softwares* oferecem esta opção. No Cabri 3D, é só clicar com o botão direito do *mouse* sobre a figura aberta e escolher *adicionar planificação*. No *software* Plethora de Poliedros basta usar a operação da aba *Montar*.

Poliedro	Vértices(V)	Arestas(A)	Faces(F)	$V - A + F$
Tetraedro				
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Tabela 2.1: Relação de Euler nos sólidos platônicos.

### Questão 4.

No *software* Plethora de Poliedros acesse a opção **toroides** e responda ao que se pede.

- (a) Observe que os toroides são poliedros, de acordo com a definição 1.1. Essas figuras são exemplos de poliedros convexos<sup>4</sup> ou não convexos?

<sup>4</sup>Um poliedro é **convexo** se qualquer reta ( não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.

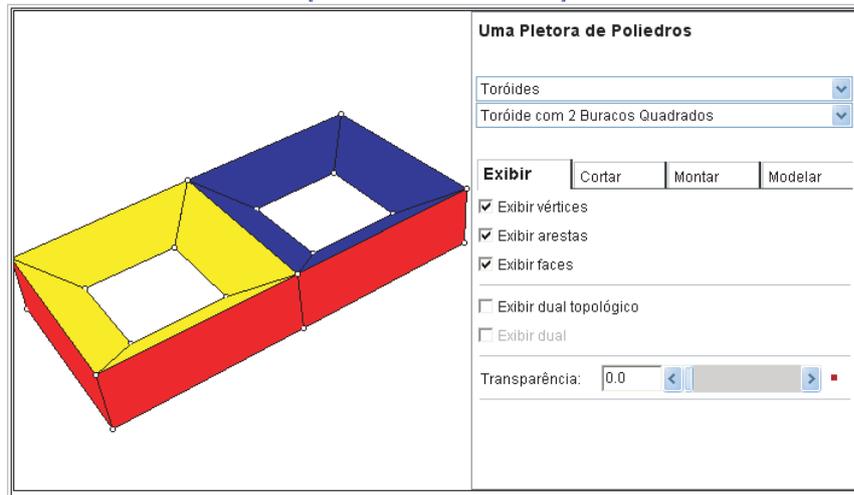


Figura 2.14: Toroide com 2 buracos quadrados.

- (b) Conte o número de vértices, arestas e faces de toroides em cada caso e complete a tabela 2.2. **Sugestão:** Você pode usar os recursos de exibição de faces e de marcação de vértices para auxiliar na contagem. Para contar o número de faces mais facilmente, você pode planificar o sólido usando a operação da aba *Montar*.
- (c) A relação de Euler é válida para algum dos toroides sugeridos?

Toroide	Vértices(V)	Arestas(A)	Faces(F)	$V - A + F$
1 Buraco Triangular				
1 Buraco Quadrado				
1 Buraco Pentagonal				
2 Buracos Quadrados				

Tabela 2.2: Relação de Euler nos toroides.

**Questão 5.**

As operações geométricas *truncar* e *preencher*, disponíveis na aba *Modelar*, do *software* Pletora de Poliedros faz o seguinte: (1) ela corta um pedaço do poliedro em cada vértice removendo as faces laterais de uma pirâmide cujo vértice é o vértice original do poliedro e, em seguida, (2) ela acrescenta faces para “tapar” os buracos que foram formados em (1).

- (a) Compare essa operação com o procedimento executado no CABRI 3D. Quais as vantagens ou desvantagens de um *software* em relação ao outro, neste caso?
- (b) Familiarize-se com esta operação geométrica no *software* Pletora de Poliedros. Note como o valor do parâmetro (controle deslizante) muda a altura da pirâmide que é removida de cada vértice. Em especial, tente truncar e preencher o icosaedro e, ajustando o valor do parâmetro (controle deslizante), tente obter o poliedro que se assemelha à bola de futebol. Qual o valor do parâmetro deve ser utilizado neste caso?
- (c) Quantos vértices, arestas e faces possui o poliedro resultante da operação de *truncar* e *preencher* (considere o valor do parâmetro igual a 0,2) aplicada ao tetraedro? E se a operação fosse aplicada ao cubo? E aos demais sólidos platônicos? É possível obter estes números sem contar um a um os vértices, arestas e faces? Tente montar uma estratégia!
- (d) Os poliedros resultantes da operação de truncar e preencher (considere o valor do parâmetro igual a 0,2) aplicada aos sólidos platônicos satisfazem a relação de Euler  $V - A + F = 2$ ? Por quê?
- (e) Aplicando a operação de truncar e preencher a um tetraedro regular, é possível obter um octaedro regular? Em caso afirmativo, qual é o valor do parâmetro?

## Capítulo 3

# Experimento “Pipa Tetraédrica, de Alexander Graham Bell”

Neste capítulo, apresentamos uma proposta para o professor do ensino médio desenvolver com seus alunos e que envolve o aprofundamento sobre áreas e volumes de figuras geométricas espaciais. Através desta atividade, pretende-se que o aluno compreenda a relação entre as áreas e os volumes de sólidos semelhantes e as implicações disto a questões de aerodinâmica de objetos, através da construção da pipa tetraédrica idealizada por *Alexander Graham Bell*. Apresentamos também o *Princípio da Similitude*, formulado por *Galileu Galilei* no século *XVII*.

As figuras usadas neste capítulo foram obtidas nos seguintes endereços eletrônicos:

<http://www.artesanatopedrasabao.com.br>

<http://www.portalpower.com.br/diversao/cubo-magico-videos-video-tutorial>

<http://macassis.blogspot.com.br/2012/02/o-que-e-lei-do-cubo-e-do-quadrado.html>

<http://www.uff.br/cdme/pgb/pgb-html/pgb-br.html>

<http://www.uff.br/cdme/pgb/pgb-html/construcao-br.html>

<http://dc184.4shared.com/doc/S3F5EIPX/preview.html>

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/sierpinsky.htm>

<http://alornacre.blogspot.com.br/2011/06/triangulo-de-sierpinski.html>

## 3.1 Sólidos Geométricos Semelhantes

Após o estudo de volumes de sólidos geométricos, é importante que o professor explore a relação ou razão entre as áreas e os volumes de figuras semelhantes. A proposta, aqui, é explorar inicialmente uma situação-problema mais simples e culminar na construção da pipa tetraédrica.

### 3.1.1 Uma Situação-Problema

Um artesão produz peças em pedra-sabão. Um turista quer comprar uma de suas obras mas com o triplo da altura da peça original. A figura 3.1 mostra o anúncio do site de divulgação.



Figura 3.1: Cristo Redentor, em pedra-sabão.

O artesão se depara com uma questão: que valor cobrar pela obra? Algumas considerações importantes:

1. É correto afirmar que a peça com o triplo do tamanho custará 135 reais?
2. O que deve ser considerado para calcular o preço da réplica com o triplo da altura da peça original?

É natural considerarmos que o preço depende da quantidade de material utilizado na escultura. Matematicamente falando, o preço deve ser proporcional ao volume do material gasto na confecção da peça. Dessa forma, basta estabelecer a relação entre o volume das peças.

Para resolvermos o problema do preço da escultura, vamos analisar inicialmente uma figura espacial mais simples, o cubo, a fim de entender melhor a relação entre as áreas e os volumes dos sólidos. A figura 3.2 vai nos ajudar nesta análise.

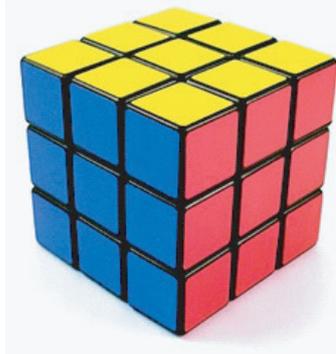


Figura 3.2: Cubo mágico.

Vamos considerar cada um dos cubos menores que compõem o cubo mágico como sendo a **unidade**. Considerando que a aresta desse cubo tenha medida 1, a aresta do cubo maior terá medida 3. O que acontece com a área da face e com o volume do cubo quando sua aresta é triplicada?

Triplmando a área do quadrado de aresta 1, encontraremos um quadrado de área  $3^2$  (veja figura 3.3).

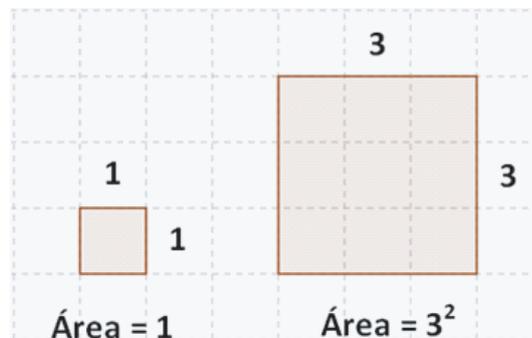


Figura 3.3: Faces dos cubos.

Podemos observar que a razão entre as medidas das arestas é  $\frac{1}{3}$  (um para três), enquanto a razão entre as áreas é  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ .

Conclusão: triplicando o lado do quadrado, sua área fica multiplicada por  $3^2 = 9$ .

O que será que acontece com o volume do cubo se triplicarmos sua aresta? Observe a figura 3.4.

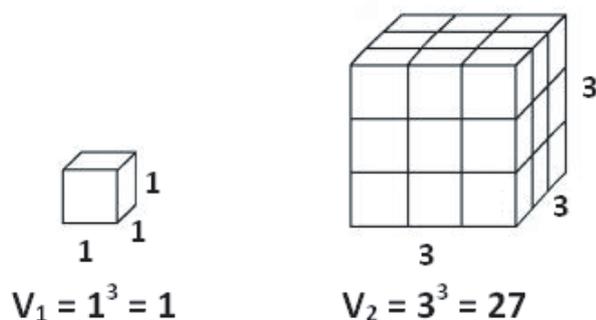


Figura 3.4: Volume de cubos.

O volume do cubo menor, de aresta 1 é 1. Este cubo será considerado como a **unidade**. Já o cubo de aresta 3 é composto por  $3^3 = 27$  cubos unitários. Assim, a razão entre os volumes dos dois cubos é  $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ .

De modo geral, podemos concluir que no caso de dois objetos ou figuras espaciais semelhantes, podemos dizer que a medida de uma vale  $k$  vezes a medida da outra, onde  $k$  é o número que representa a razão de semelhança entre as duas figuras ou objetos.

Assim, a área de uma vale  $k^2$  vezes a área da outra e o volume de uma vale  $k^3$  vezes o volume da outra. A tabela 3.1 resume estas informações.

Figuras Semelhantes		
razão entre comprimentos	razão entre áreas	razão entre volumes
$k$	$k^2$	$k^3$

Tabela 3.1: Razão entre figuras semelhantes.

É exatamente esta relação entre comprimentos, áreas e volumes de figuras semelhantes que vai nos ajudar a resolver o problema do artesão. Como estamos considerando que é a quantidade de material gasto na escultura que determinará o preço a ser cobrado, precisamos estabelecer a razão entre os volumes das esculturas.

Como a escultura original tem 30 cm (segundo a figura 3.1) e a cópia solicitada pelo turista deve ter o triplo do tamanho desta peça, temos que, neste caso, a razão entre os comprimentos das esculturas é  $\frac{1}{3}$ , e portanto, a razão entre os volumes é  $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ . Veja a tabela 3.2.

Assim, podemos concluir que a escultura solicitada pelo turista gasta 27 vezes

Figuras Semelhantes	
razão entre comprimentos	razão entre volumes
$k$	$k^3$
$1/3$	$1/27$

Tabela 3.2: Razão entre volumes de figuras semelhantes.

a quantidade de material do objeto original e, portanto, o preço a ser cobrado pela peça deverá ser

$$R\$45,00 \times 27 = R\$1215,00.$$

## 3.2 O Princípio da Similitude

Com a discussão apresentada acima, estamos prontos para compreender o *Princípio da Similitude*, de *Galileu Galilei*, formulado em 1638.

Bortollossi afirma que:

Segundo este princípio, se um organismo biológico aumentar o seu tamanho, ele vai ter que mudar a sua estrutura. Considere, por exemplo, a situação de dois animais semelhantes, onde um deles tem o dobro da escala do outro. A “espessura” de um osso do animal maior será 4 vezes maior do que a “espessura” do osso correspondente do animal menor, mas este osso terá que suportar 8 vezes mais peso. Portanto, a estrutura óssea do animal maior será bem mais frágil se comparada com a do animal menor. Pelo *Princípio da Similitude*, uma “versão maior” do animal menor precisará mudar a sua estrutura (por exemplo, aumentando mais do que 4 vezes a “espessura” dos ossos) para garantir robustez. ([7]).

No início do século *XIX*, uma preocupação tecnológica que ocupava os cientistas da época era a possibilidade de construção de aparatos voadores grandes e aerodinamicamente estáveis. O astrônomo e matemático *Simon Newcomb* (1835-1909) reformulou o *Princípio da Similitude* de *Galileu Galilei*, manifestando sua incredulidade em tais construções, argumentando:

Considere duas máquinas voadoras semelhantes, sendo que uma tem o dobro da escala da outra. Todos sabemos que o volume e, então, o peso de dois corpos semelhantes são proporcionais aos cubos de suas dimensões. O cubo de dois é 8; então a máquina

maior terá 8 vezes o peso da máquina menor. As áreas das superfícies destas máquinas, por outro lado, são proporcionais aos quadrados de suas dimensões. O quadrado de dois é 4. Desta maneira, a máquina mais pesada exporá ao vento uma superfície com área apenas 4 vezes maior, tendo então uma nítida desvantagem na razão eficiência por peso. ([7]).

Foi neste contexto que *Alexander Graham Bell*<sup>1</sup> elaborou sua pipa tetraédrica, na tentativa de provar a possibilidade de construção desses aparatos. “Alexander

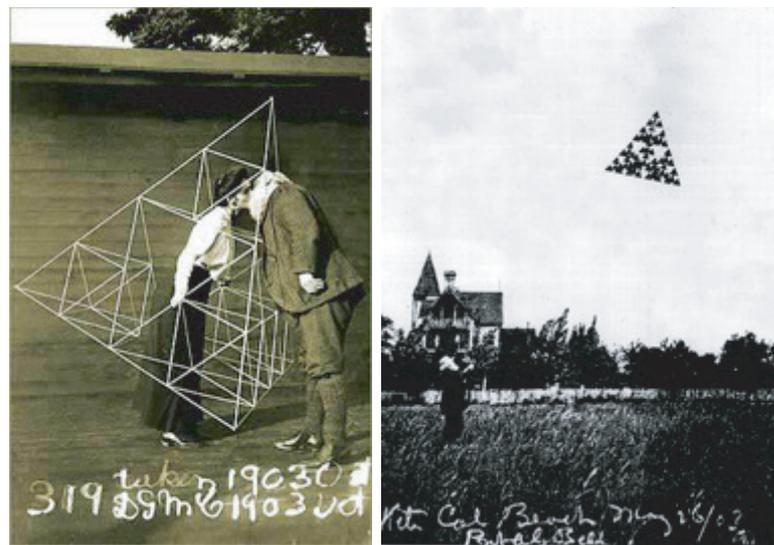


Figura 3.5: *Graham Bell* e sua pipa tetraédrica.

Graham Bell propôs um modelo de pipa aerodinamicamente estável e cujo tamanho pode ser aumentado mantendo-se constante a razão eficiência por peso”, afirma Bortolossi. ([7]).

A ideia de *Graham Bell* era usar células tetraédricas. A atividade que segue foi baseada num experimento educacional elaborado pela equipe do site *Conteúdos Digitais para o Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística* (CDME)<sup>2</sup>, da Universidade Federal Fluminense (UFF), sob a responsabilidade do professor Humberto José Bortolossi. Esta atividade foi aplicada em duas escolas da rede estadual do município de São João Evangelista, Minas Gerais, e apresentado num *Campeonato de Pipas* promovido entre as escolas.

<sup>1</sup>Por muito tempo, *Graham Bell* ficou conhecido como o inventor do telefone mas em 11 de junho de 2002, o Congresso dos Estados Unidos revogou sua patente em favor do inventor italiano *Antonio Santi Giuseppe Meucci* (1808-1889). Fonte: <http://www.uff.br/cdme/pgb/>.

<sup>2</sup><http://www.uff.br/cdme/pgb/>

### 3.3 Construindo a Pipa Tetraédrica

Para construir a pipa tetraédrica, siga os passos descritos a seguir.

**Passo 1:** Providencie os materiais necessários.

- 24 canudos de mesmo tamanho (sugestão: utilize os menos flexíveis);
- 1 carretel de linha (linha de pipa);
- 4 folhas de papel de seda;
- 1 cartolina (para o molde do corte);
- 1 fita dupla-face;
- 1 tesoura;
- 1 palito de madeira (para reforçar a estrutura de um dos canudos).



Figura 3.6: Materiais necessários para a construção da pipa tetraédrica.

**Passo 2:** Corte um pedaço de linha com tamanho 16 vezes o comprimento do canudo. Passe um dos segmentos de linha por dentro de seis canudos de acordo com a ordem indicada na figura 3.7. Depois disso, puxe as pontas para formar a estrutura tetraédrica, dando um nó e cortando os excessos. Uma dica para facilitar a passagem da linha por dentro dos canudos é sugá-la, tomando o devido cuidado para não engoli-la. Monte quatro estruturas dessas.

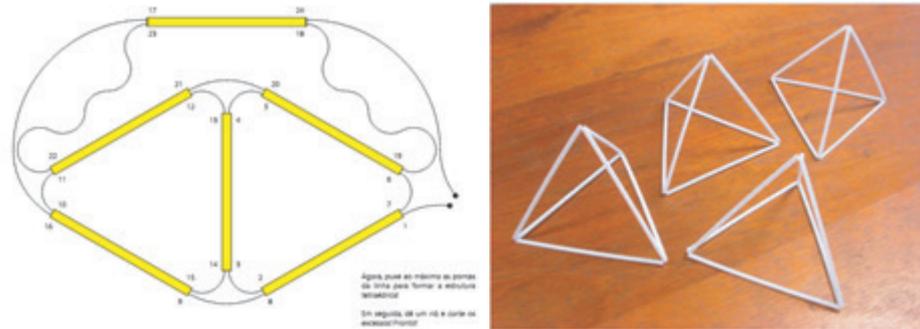


Figura 3.7: Montagem das estruturas tetraédricas.

**Passo 3:** Para revestir as estruturas tetraédricas com a folha de seda, será preciso providenciar o molde, que é feito a partir de meio triângulo equilátero, cujo lado deve ter a medida do comprimento do canudo. É necessário acrescentar uma aba, cuja finalidade é encapar o canudo. No apêndice A, são apresentados moldes de diversos tamanhos. É só escolher o que corresponde ao tamanho do canudo, imprimi-lo, colá-lo sobre a cartolina e recortar. A figura 3.8 ilustra o modelo de um molde.

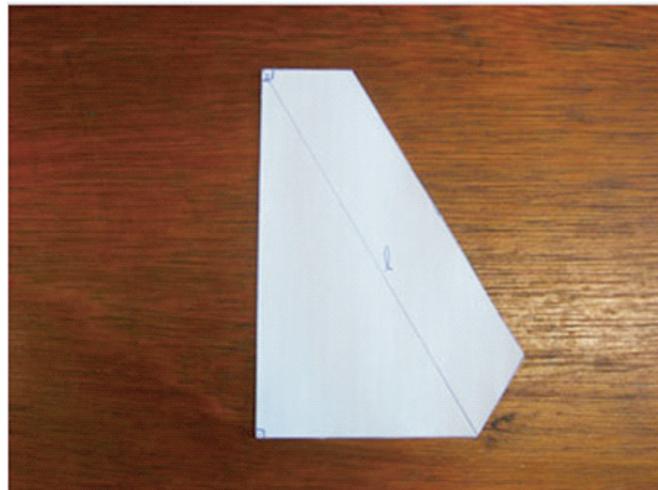


Figura 3.8: Molde do revestimento da pipa.

**Passo 4:** Pegue cada uma das folhas de papel de seda e dobre-a em quatro. Posicione o molde sobre a folha dobrada, com o vértice do ângulo reto no canto onde se encontram as dobras (centro da folha). Em seguida, recorte a folha dobrada em torno do molde.

**Passo 5:** Cole tiras de fita dupla-face em cada uma das abas e na diagonal menor do losango obtido, como ilustra a figura 3.9.

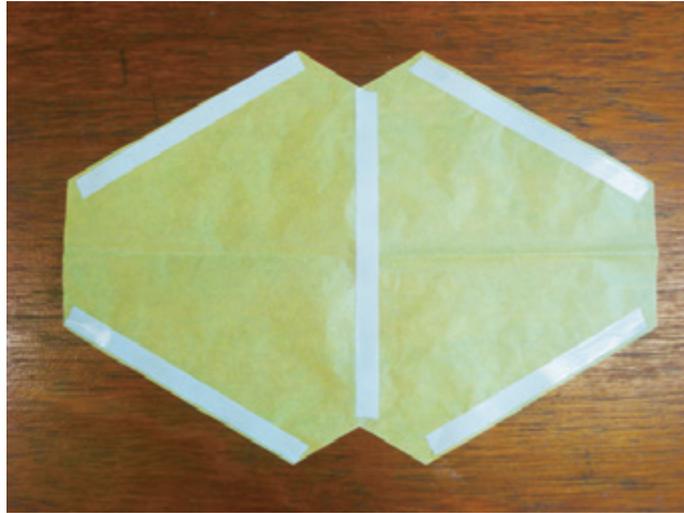


Figura 3.9: Revestimento da pipa.

**Passo 6:** Apóie uma das arestas da estrutura tetraédrica na fita do meio e ajuste as outras arestas, envolvendo-as com as abas. Faça isto com as quatro estruturas, segundo a figura 3.10.

**Passo 7:** Amarre as estruturas pelos vértices de modo que cada uma fique ligada às outras três, segundo a figura 3.11.

**Passo 8:** Para finalizar, é preciso fazer o cabresto da pipa. São usados os vértices superior do tetraedro de cima e outro no encontro entre os tetraedros da frente, como indicado na figura 3.12, lembrando de deixar uma pequena folga. Para reforçar a estrutura da pipa, encaixe um palito de madeira na aresta do cabresto.

A pipa está pronta! Podemos combinar várias pipas com 4 estruturas tetraédricas para compor pipas maiores, por exemplo, com 16 estruturas tetraédricas, como a da figura 3.13, elaborada por ocasião do *I Campeonato de Pipas*<sup>3</sup> que realizamos em São João Evangelista em 11 de setembro de 2012.

### 3.4 Questionário para Avaliação da Atividade

As questões a seguir deverão ser respondidas em associação à atividade de construção da pipa tetraédrica. No apêndice B, são apresentadas sugestões de respostas para cada uma das questões.

---

<sup>3</sup>O evento foi uma ação vinculada ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID/CAPES), do qual a autora é coordenadora de área.

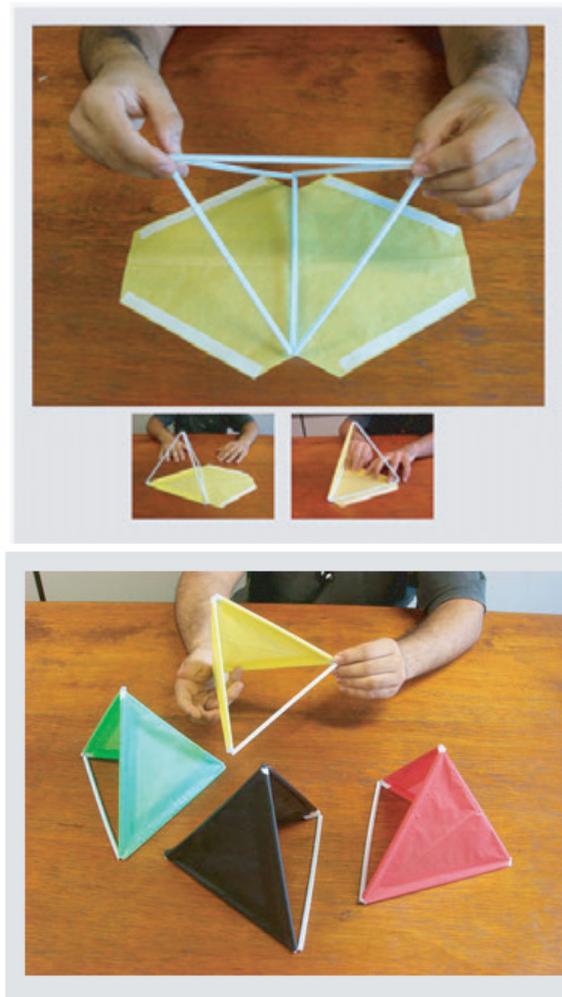


Figura 3.10: Revestindo as estruturas tetraédricas.

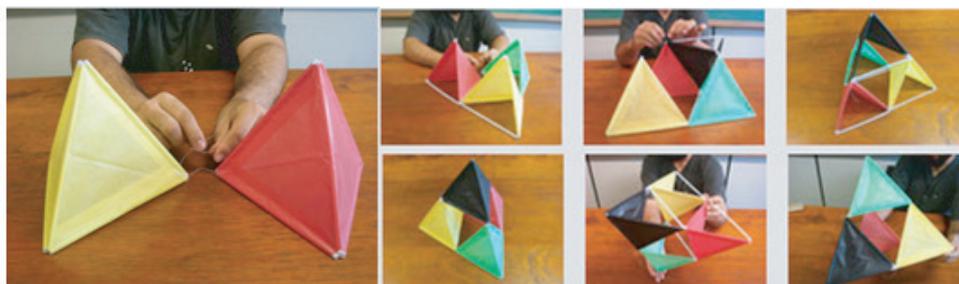


Figura 3.11: Amarrando as estruturas tetraédricas.

### Questão 1.

A figura 3.14 apresenta duas estruturas usadas no processo de construção da

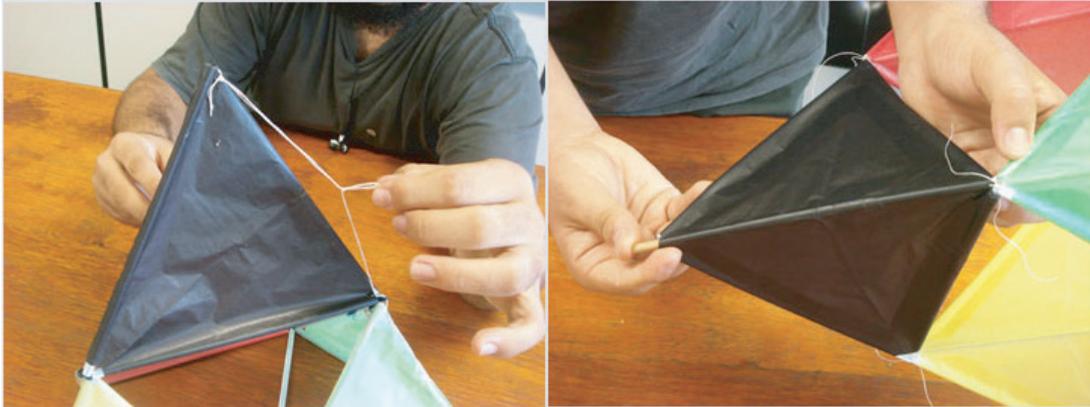


Figura 3.12: Cabresto da pipa e reforço da estrutura.



Figura 3.13: Campeonato de Pipas.

pipa tetraédrica de Alexander Graham Bell, sendo que a estrutura da direita é constituída por 4 réplicas da estrutura ilustrada à esquerda.

- (a) Qual é a razão entre as medidas dos segmentos  $AB$  e  $A'B'$ ?
- (b) Qual é a razão entre as áreas dos triângulos  $DBC$  e  $D'B'C'$ ?
- (c) Qual é a razão entre os volumes dos tetraedros  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ ?

**Questão 2.** Seja  $L$  o comprimento do canudo usado na construção das pipas tetraédricas.

- (a) Quantos canudos são necessários para se construir a estrutura tetraédrica  $ABCD$  na figura da questão 1?
- (b) A estrutura tetraédrica  $A'B'C'D'$  na figura da questão 1 é construída usando-se 4 cópias da estrutura tetraédrica  $ABCD$ . Note, portanto, que o tetraedro  $A'B'C'D'$  tem arestas com tamanho  $2L$ . Quantos canudos são necessários para se construir esta estrutura tetraédrica de arestas com tamanho  $2L$ ?

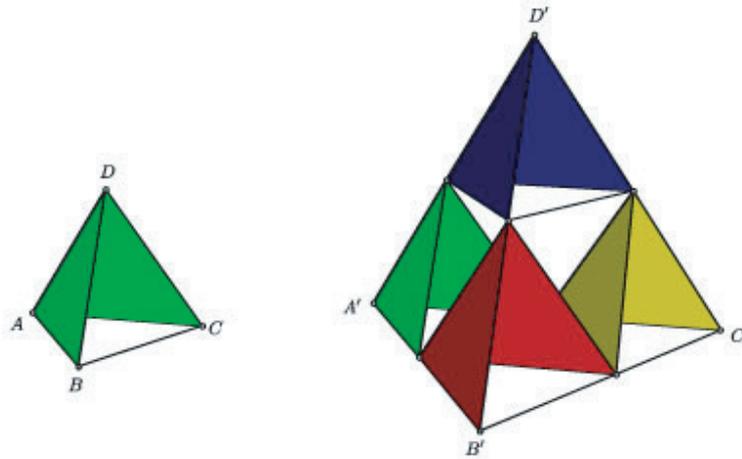


Figura 3.14: Estruturas para a construção de pipas tetraédricas.

- (c) Se usarmos agora 4 cópias da pipa  $A'B'C'D'$ , podemos construir uma estrutura tetraédrica com arestas de tamanho  $4L$ . Quantos canudos serão necessários para construí-la?
- (d) Mais geralmente, quantos canudos são necessários para se construir uma estrutura tetraédrica com arestas de tamanho  $2^n L$ , usando-se o método dos itens anteriores?

**Questão 3.** Seja  $L$  o comprimento do canudo usado na construção das pipas tetraédricas.

- (a) Qual é a área total das asas (faces coloridas) da estrutura tetraédrica  $ABCD$  na figura 3.14, da questão 1?
- (b) Qual é a área total das asas (faces coloridas) da estrutura tetraédrica  $A'B'C'D'$  na figura 3.14, da questão 1?
- (c) Qual é a área total das asas (faces coloridas) da estrutura tetraédrica consída no item (c) da questão 2?
- (d) Mais geralmente, qual é a área total das asas da estrutura tetraédrica com arestas de tamanho  $2^n L$ , construída no item (d) da questão 2?

**Questão 4.** Seja  $L$  o comprimento do canudo usado na construção das pipas tetraédricas. Suponha que cada canudo tenha peso  $P$  e que os pesos das asas e das linhas são desprezíveis em comparação com o peso do canudo.

- (a) Calcule a razão entre o peso e a área total das asas da estrutura tetraédrica  $ABCD$  na figura da questão 1.
- (b) Calcule a razão entre o peso e a área total das asas da estrutura tetraédrica  $A'B'C'D'$  na figura da questão 1.
- (c) Calcule a razão entre o peso e a área total das asas da estrutura tetraédrica construída no item (c) da questão 2.
- (d) Mais geralmente, calcule a razão entre o peso e a área total das asas da estrutura tetraédrica com arestas de tamanho  $2^n L$ , construída no item (d) da questão 2. O que você observa?

#### Questão 5.

- (a) Considere dois canudos de mesma espessura, um com comprimento  $L$  e o outro com comprimento  $2L$ . Estes canudos são semelhantes?
- (b) Considere dois tetraedros regulares  $T_1$  e  $T_2$  formados por canudos de mesma espessura. O comprimento dos canudos usados em  $T_2$  é o dobro do comprimento dos canudos usados em  $T_1$ . Os tetraedros  $T_1$  e  $T_2$  são semelhantes?
- (c) Por que a construção das pipas tetraédricas de vários tamanhos seguindo a receita dada por Alexander Graham Bell não é uma violação do argumento dado por Simon Newcomb?

**Questão 6.** Na figura 4, as pipas tetraédricas  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  são tais que  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $AD = A'D'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $BD = B'D'$  e  $CD = C'D'$ . Mais ainda: todas as arestas da pipa tetraédrica  $A'B'C'D'$  são congruentes. Qual pipa tem asas com superfície de maior área?

### 3.5 Relação entre a Pipa Tetraédrica e a Pirâmide de Sierpinski

A pipa tetraédrica possui uma estrutura muito semelhante à da *pirâmide de Sierpinski*, a versão tridimensional do *triângulo de Sierpinski*, ambas consideradas estruturas da *Geometria Fractal*.

**Geometria Fractal**, segundo Fainguelernt e Nunes ([13, p.72]), é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza. Na verdade a definição de fractal é bastante complexa. No entanto, podemos dar uma ideia intuitiva da definição através de duas das suas características mais representativas:

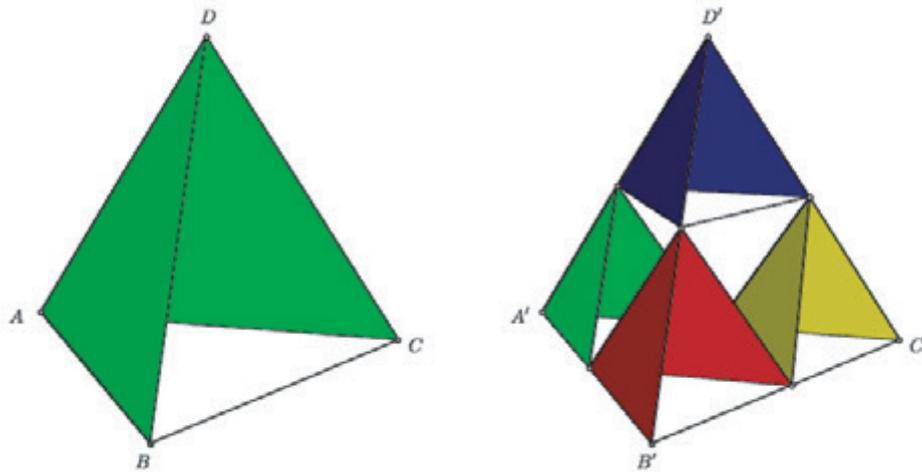


Figura 3.15: Pipas  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$

**1º:** Um fractal possui uma estrutura de auto-semelhança, o que quer dizer que cada uma das partes que o compõem têm a mesma forma que o modelo original.

**2º:** Sua área finita (a superfície que ocupam está contida dentro de uns limites), tem, paradoxalmente, um perímetro infinito, ou seja, o comprimento da linha que delimita essa área é infinita.

O triângulo de Sierpinski foi descrito por *Waclaw Sierpinski* em 1915 e obtém-se como limite do seguinte processo recursivo:

**1º Passo:** Considera-se um triângulo equilátero.

**2º Passo:** Unem-se os pontos médios de cada lado do triângulo, formando 4 triângulos cujos lados estão ligados.

**3º Passo:** Retira-se agora o triângulo central.

A recursão consiste em repetir indefinidamente o procedimento anterior em relação a cada um dos triângulos obtidos.

Uma atividade que pode ser associada à da pipa tetraédrica é a construção, a partir da planificação do tetraedro regular, da pirâmide de Sierpinski. O professor pode propor esta atividade associada a uma pesquisa sobre *fractais* e uma abordagem dos elementos matemáticos relacionados a essa estrutura.

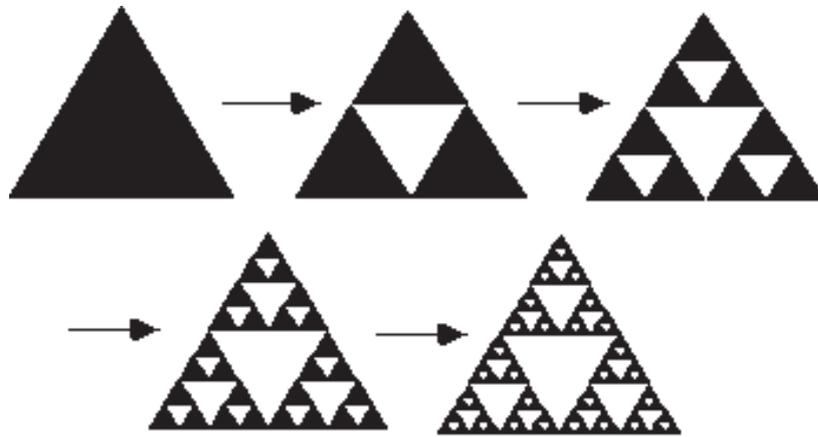


Figura 3.16: Diferentes níveis do triângulo de Sierpinski.

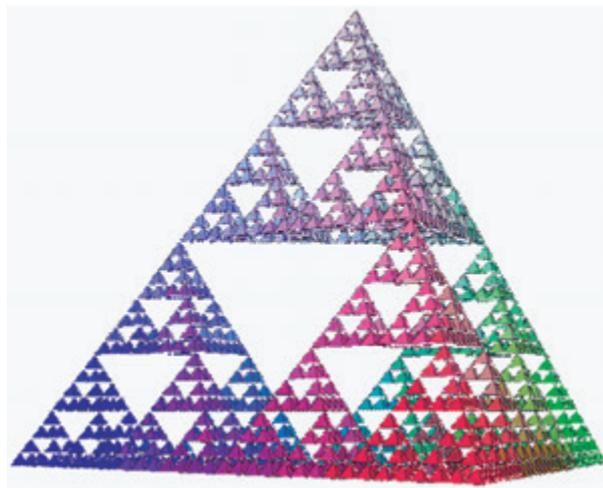


Figura 3.17: Pirâmide de Sierpinski.



Figura 3.18: Construção da pirâmide de Sierpinski.

# Capítulo 4

## Cartilha para o Professor

Neste capítulo, apresentamos orientações a professores sobre a utilização, em sala de aula, dos experimentos propostos nos capítulos 2 e 3.

O que propomos é que as atividades sejam realizadas numa perspectiva de uma aula de investigação. Sobre isto, Ponte e outros afirmam:

Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza seus recursos cognitivos e afetivos com vistas a atingir um objetivo. Este é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. ([18, p. 23]).

Os experimentos apresentados nos capítulos 2 e 3 se complementam pois, no primeiro, sobre a Geometria da Bola de Futebol, propomos a utilização de recurso computacional para a exploração de conceitos e ideias acerca de poliedros. Já na atividade da Pipa Tetraédrica, novamente os sólidos regulares são abordados, neste caso o tetraedro, no entanto, na perspectiva de um trabalho de manipulação de material. Sobre esta questão, Fainguelernt e Nunes argumentam:

Tanto o uso de materiais manipuláveis quanto de ambientes informatizados de aprendizagem favorecem a construção do conhecimento pelo aluno. Mas para desenvolvermos realmente um trabalho eficiente e significativo com o tema poliedros devemos aliar ao uso de *softwares* de geometria dinâmica e de materiais manipuláveis, o desenvolvimento de atividades investigativas. O aluno precisa assumir o papel de investigador, construtor de seu conhecimento. Ele, a partir de diferentes situações-problema, deve

ser levado a experimentar, interpretar, visualizar, conjecturar, generalizar e abstrair. ([13, p.128])

Neste sentido, as perguntas dos questionários relacionados a cada experimento foram escolhidas com o propósito de tornar as atividades propostas em experiências significativas de construção de conhecimento pelo aluno.

## Objetivos

Com o experimento *Geometria da Bola de Futebol*, além de exercitar a visualização espacial, pretende-se apresentar e explorar a Relação de Euler para poliedros convexos e não convexos e aplicar a operação geométrica truncamento ao poliedro regular icosaedro.

Já na atividade da *Pipa tetraédrica* os objetivos são: explorar questões de contagem, semelhança, proporcionalidade, áreas e volumes relacionados com a justaposição de tetraedros. Além dos aspectos inerentes à Matemática, pretende-se explorar o princípio da similitude de *Galileu Galilei*, uma oportunidade de uma abordagem interdisciplinar: a matemática relacionada a conceitos físicos de aerodinâmica.

## Quando usar?

Sugerimos que a atividade *Geometria da Bola de Futebol* seja usada como motivação ao tema **Poliedros**, em Geometria Espacial, geralmente um assunto tratado no 2º ano do Ensino Médio. Dessa forma, o experimento deve ser trabalhado em até **2 aulas**, como introdução ao tema.

Já o experimento *Pipa Tetraédrica* pode ser trabalhado, ainda no tratamento de Geometria Espacial, no 2º ano do Ensino Médio, porém, como introdução ao tópico **Sólidos Semelhantes**, ocupando o total de até **2 aulas**.

Em ambos os casos, as atividades terão um aspecto de contextualização e motivação para o conteúdo que será apresentado.

## Como usar?

O experimento *Geometria da Bola de Futebol* depende de recursos computacionais. A utilização do computador como recurso metodológico, em sala de aula, é uma questão que depende de vários fatores, entre eles: número de alunos na turma, número de computadores disponíveis no laboratório de informática e tempo disponível. Sendo assim, apresentamos duas sugestões de estratégias para execução desta atividade.

1. **Em sala de aula, com um projetor multimídia (datashow).** Desta forma, o professor pode exibir e manipular os poliedros, ao invés de simplesmente apresentar as figuras estáticas desenhadas no quadro. Algumas questões do questionário podem ser resolvidas em sala de aula, sob orientação do professor.
2. **Atividade de laboratório sob a supervisão do professor.** A principal vantagem, neste caso, é a interação dos alunos com o computador, que deve ser acompanhada de perto pelo professor.

Sugerimos que, associado ao uso das ferramentas computacionais, seja proposto aos alunos, como atividade extra-classe, a confecção dos sólidos platônicos e do icosaedro truncado a partir de suas planificações. Tanto o *Cabri 3D* quanto o software *Pletora de Poliedros* oferecem a opção de gerar a figura planificada para impressão.

A oficina de construção da *Pipa Tetraédrica* pode ser realizada em sala de aula, como um projeto de feira de ciências ou como uma atividade de recreação.

Em sala de aula, podem ser formados pequenos grupos com quatro ou cinco alunos. Cada grupo pode montar uma pipa com 4 estruturas tetraédricas, seguindo os passos descritos na atividade. Esta pipa, por si só, já pode alçar vôo. Depois, os alunos podem combinar estas pipas para construir pipas maiores, com 16 ou até mesmo 64 células tetraédricas.

## Discussão após a Realização da Atividade

Etapa extremamente importante e imprescindível é a realização da discussão com os alunos dos resultados encontrados. Sobre a relevância desta etapa, Ponte e outros afirmam:

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. ([18, p. 41]).

## Avaliação

É importante que as atividades de investigação matemática, desenvolvidas com a manipulação dos softwares *Cabri 3D* e *Plethora de Poliedros* e com a construção da pipa tetraédrica, sejam avaliadas. Uma das formas de fazê-lo é propor que, durante a realização das atividades, os alunos preencham algum tipo de questionário de acompanhamento. Sobre esse tipo de avaliação, Ponte e outros argumentam:

As investigações matemáticas são uma atividade de aprendizagem e, como em todas as outras atividades, tem de haver avaliação. Essa avaliação permitirá ao professor saber se os alunos estão progredindo de acordo com as suas expectativas ou se, pelo contrário, é necessário repensar a sua ação nesse campo. Além disso, permitirá ao aluno saber como o seu desempenho é visto pelo professor e se existem aspectos a que precisa dar mais atenção. ([18, p. 109]).

Associado ao preenchimento de cada questionário, o professor deve solicitar aos alunos a elaboração de um relatório. Sobre a utilização de relatórios nas aulas de matemática, Ponte e outros ressaltam:

Os alunos estão habituados a escrever respostas sintéticas em Matemática, quando muito apresentando os cálculos usados para obtê-las e, por isso, faz-lhes muitas vezes confusão o pedido de descrever os processos usados, em especial no que respeita as estratégias tentadas e abandonadas e as conjecturas testadas e rejeitadas. Para os alunos, fazer este tipo de relatório é, também, uma aprendizagem. ([18, p. 116]).

A seguir, descrevemos o roteiro sugerido por Ponte e outros em [18, p. 117], para elaboração de um relatório de uma atividade de investigação matemática.

- Identificação do aluno ou grupo de alunos.
- Título.

- Objetivo do trabalho.
- Descrição do processo de investigação, das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas.
- Conclusões.
- A sua apreciação crítica da tarefa proposta.
- Apreciação autocrítica da sua intervenção no trabalho.
- Bibliografia e outros materiais consultados.

Nesse relatório, o professor poderá avaliar a:

- Organização do trabalho.
- Descrição e justificativa dos procedimentos utilizados.
- Correção e clareza dos raciocínios.
- Correção dos conceitos matemáticos envolvidos.
- Correção e clareza da linguagem utilizada.
- Criatividade.

## Exposição dos Trabalhos

Sugerimos que o professor organize uma mostra com trabalhos que ilustrem as atividades que foram realizadas em sala. Essa exposição pode ser realizada, por exemplo, numa *Feira de Matemática*.

No caso da *Geometria da Bola de Futebol*, como foram utilizados recursos computacionais, podem-se confeccionar os poliedros que foram abordados, a partir de suas planificações.

Já para a *Pipa Tetraédrica*, além da exposição dos artefatos, pode-se organizar uma espécie de *Festival* ou *Campeonato de Pipas*.

A figura 4.1 ilustra um trabalho apresentado em 2011 em uma Feira de Matemática <sup>1</sup> em uma escola pública do município de São João Evangelista, Minas Gerais.

---

<sup>1</sup>As Feiras de Matemática e o Campeonato de Pipas foram ações do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID/CAPES), desenvolvidas numa parceria entre o Instituto Federal de Minas Gerais e escolas da rede estadual e municipal de São João Evangelista, sob a coordenação da autora desta dissertação



Figura 4.1: Trabalho apresentado em Feira de Matemática.

# Considerações Finais

Pretendemos, com este trabalho, contribuir para a reflexão sobre a possibilidade e a necessidade do professor de Matemática do Ensino Médio inovar a sua prática. Nossa intenção aqui foi, de certo modo, fazer um convite ao professor da Educação Básica à reinvenção de sua ação docente e à recriação do ambiente de sala de aula, a fim de torná-lo um espaço dinâmico, de interação e aprendizagem significativa.

Os temas *Geometria da Bola de Futebol* e *Pipa Tetraédrica* remetem a aspectos lúdicos do cotidiano. Jogar bola e empinar pipa carregam uma conotação de atividades prazerosas e, portanto, acreditamos que possam desempenhar um papel motivador à aprendizagem de Matemática, despertando o interesse dos alunos por essa ciência, mostrando sua beleza, aplicações cotidianas e em outras áreas do conhecimento.

Para pensar numa mudança é preciso antes de tudo ter coragem, é preciso ousar, criar e experimentar; é preciso buscar uma mudança de paradigmas para testar e avaliar o potencial de nossos alunos e vê-los numa perspectiva de competência, mas isso significa antes de tudo um teste e a avaliação de nós mesmos enquanto profissionais. ([3, p.11])

## Referências Bibliográficas

- [1] H. ALENCAR e M. VIANA, **Ensino de Ciências e Matemática no Brasil: Desafios para o século XXI**. IV Conferência Nacional de Ciência Tecnologia e Inovação, Brasília, maio 2010.
- [2] T. C. S. ALMEIDA, **Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no Renascimento**, 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.
- [3] E. M. S. ALVES, **A ludicidade e o ensino de matemática: uma prática possível**. Campinas, SP: Papirus, 2001
- [4] V. BONGIOVANNI e A. P. JAHN, **Algumas possibilidades do software Cabri 3D para o estudo da Geometria Espacial**. Revista do Professor de Matemática - RPM, Rio de Janeiro: SBM, n.69, p.50-54, mai./ago. 2009.
- [5] H. J. BORTOLOSSI, **Sólidos Platônicos**. CDME - Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística, UFF. Disponível em <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>
- [6] H. J. BORTOLOSSI, **Pletora de Poliedros**. CDME - Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística, UFF. Disponível em <http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html>
- [7] H. J. BORTOLOSSI, **Pipa Tetraédrica de Alexander Graham Bell**. CDME - Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística, UFF. Disponível em <http://www.uff.br/cdme/pgb/pgb-html/pgb-br.html>
- [8] C. B. BOYER, **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1996.

- [9] D. M. B. COSTA ET. AL, **Elementos de Geometria: Geometria Plana e Espacial**. 3. ed. Curitiba: UFPR, 2012.
- [10] L. R. DANTE, **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2012. v.2.
- [11] S. DRUCK, **Sobre o Ensino da Matemática no Brasil**. IV Conferência Nacional de Ciência Tecnologia e Inovação, Brasília, maio 2010.
- [12] H. EVES, **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [13] E. K. FAINGUELERNT, K. R. A. NUNES, **Matemática: Práticas Pedagógicas para o Ensino Médio**. Porto Alegre: Penso, 2012.
- [14] L. M. IMENES, M. LELLIS, **Matemática para Todos**, v.2, 2ª edição. São Paulo: Scipione, 2002.
- [15] E. L. LIMA, P.C.P.CARVALHO, E.WAGNER, A. C. MORGADO, **A Matemática do Ensino Médio**, v.2., 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [16] E. L. LIMA, **Meu professor de Matemática e outras histórias**, 5ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [17] A. MAIA JR e J. MANZOLLI, **Sinfonia de Poliedros**. Recursos Educacionais Multimídia para a Matemática do Ensino Médio. Disponível em <http://www.m3.ime.unicamp.br>
- [18] J. P. PONTE, J. BROCARDO e H. OLIVEIRA **Investigações Matemáticas em Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
- [19] P. S. B. RABELLO, **Geometria Descritiva Aplicada a Sólidos**. Rio de Janeiro: UERJ, 2011.

# Apêndice A: Moldes para a Confecção dos Revestimentos das Pipas Tetraédricas

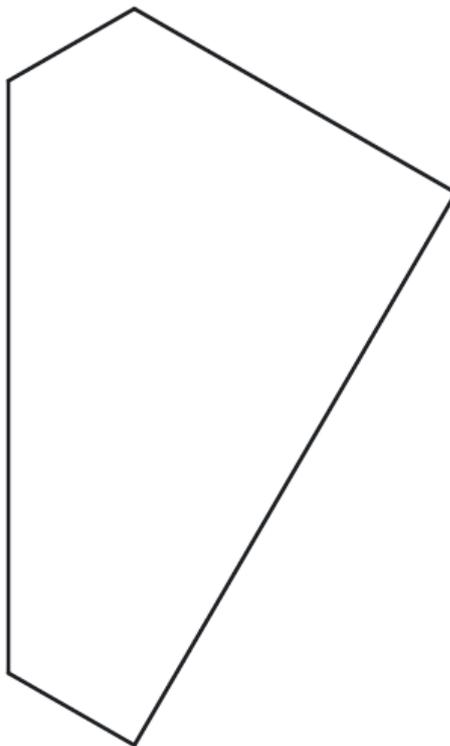


Figura A1: Molde para canudo de 10,5 cm.

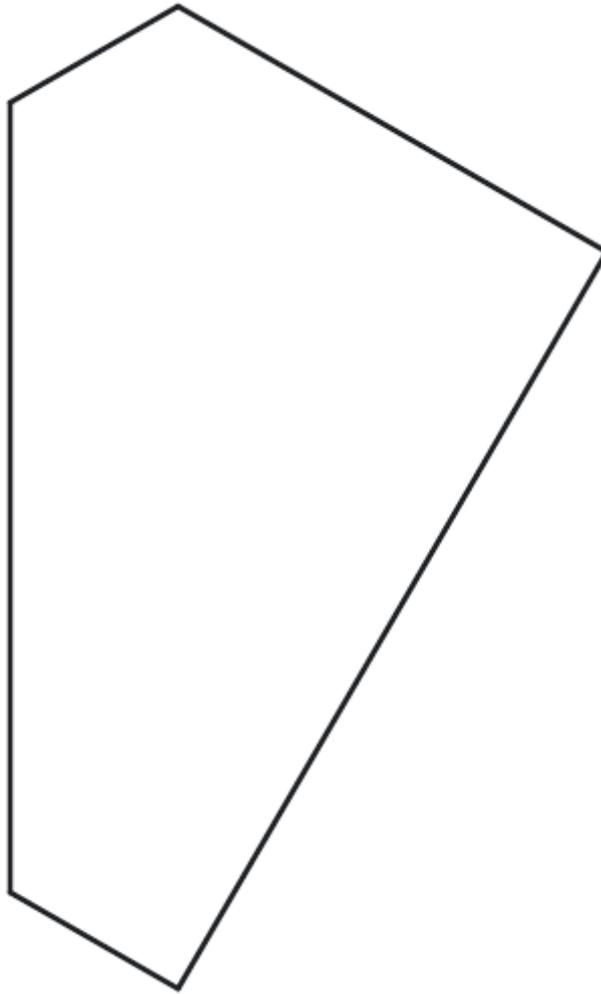


Figura A2: Molde para canudo de 13,5 cm.

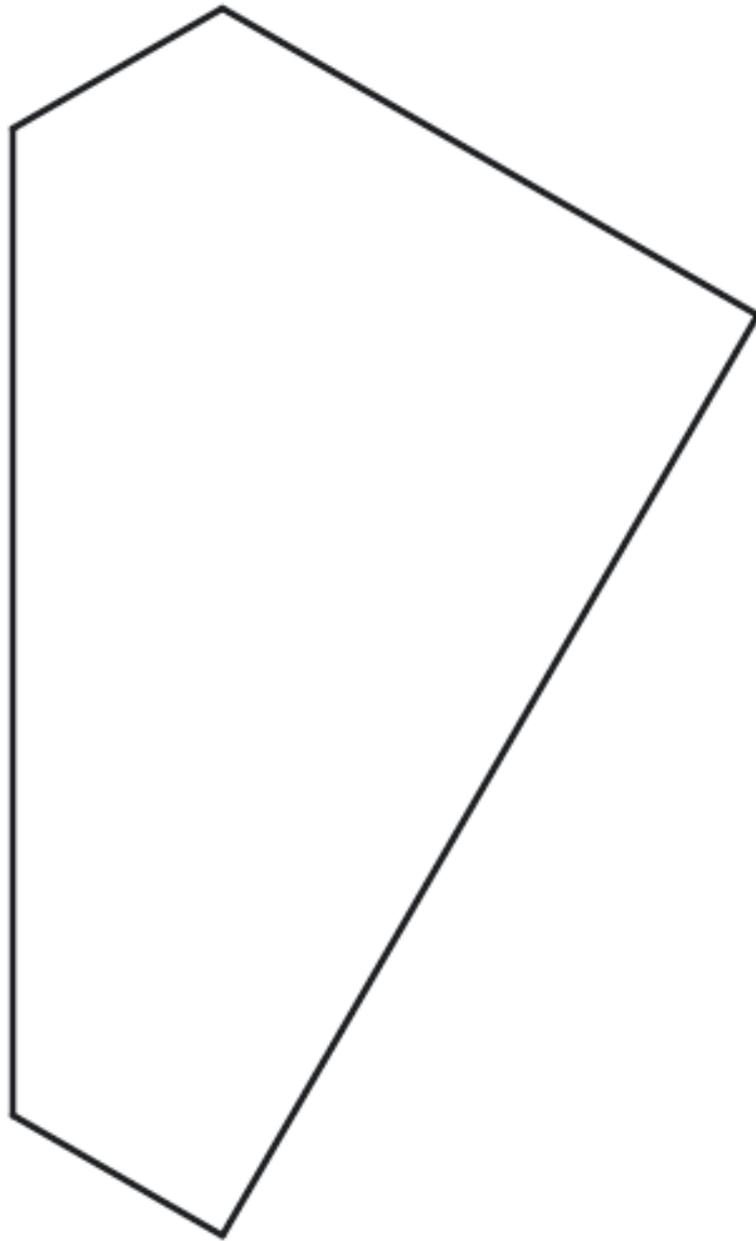


Figura A3: Molde para canudo de 16,5 cm.

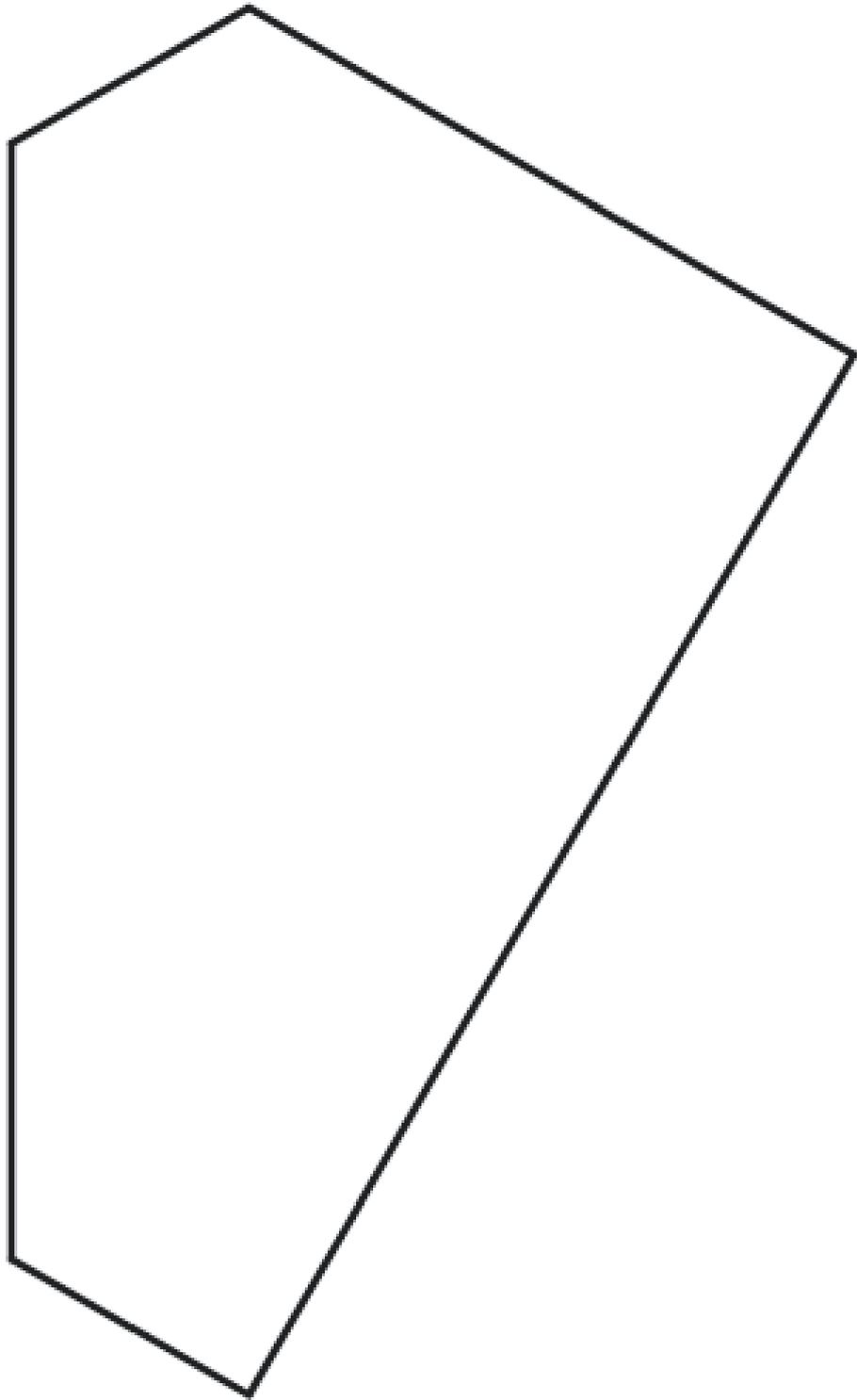


Figura A4: Molde para canudo de 19,5 cm.

## Apêndice B: Respostas para o Formulário da Atividade “Pipa Tetraédrica”

### Questão 1.

- (a)  $1/2$ .
- (b)  $(1/2)^2 = 1/4$ .
- (c)  $(1/2)^3 = 1/8$ .

### Questão 2.

- (a) 6 canudos.
- (b)  $4 \times 6 = 24$ .
- (c)  $4 \times 4 \times 6 = 96$ .
- (d) Aqui, vale a pena organizar as informações numa tabela, como a que segue.

Tamanho da aresta	Número de canudos
$L = 2^0 \times L$	$6 = 4^0 \times 6$
$2L = 2^1 \times L$	$4 \times 6 = 4^1 \times 6$
$4L = 2^2 \times L$	$4 \times 4 \times 6 = 4^2 \times 6$

Tabela B1: Número de canudos de uma estrutura tetraédrica.

Observando o padrão apresentado na tabela B1 acima, podemos afirmar que o número de canudos necessários para se construir uma estrutura tetraédrica com arestas de tamanho  $2^n L$  é  $4^n \times 6$ .

**Questão 3.**

- (a) Como as estruturas tetraédricas são tetraedros regulares de aresta  $L$  (comprimento do canudo), as asas são compostas por 2 triângulos equiláteros de lado  $L$ . Portanto, a área de cada asa é  $2 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ .
- (b) Neste caso, temos 4 asas e a área total será dada por  $4 \times 2 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ .
- (c) Temos 4 cópias da pipa  $A'B'C'D'$  e portanto 16 estruturas tetraédricas e 16 asas. A área total das asas, portanto, será dada por  $4 \times 4 \times 2 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ .
- (d) Para facilitar a compreensão da questão, podemos organizar as informações sobre a área total das asas de acordo com o tamanho da aresta numa tabela.

Tamanho da aresta	Área total das asas
$L = 2^0 \times L$	$4^0 \times 2 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$
$2L = 2^1 \times L$	$4^1 \times 2 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$
$4L = 2^2 \times L$	$4^2 \times 2 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$

Tabela B2: Área total das asas das estruturas tetraédricas.

Observando o padrão apresentado na tabela B2, podemos concluir que a área total das asas da estrutura tetraédrica com arestas de tamanho  $2^n L$ , construída no item (d) da questão 2, será dada por  $4^n \times 2 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ .

**Questão 4.**

- (a)  $\frac{6P}{2\frac{L^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{12P}{L^2\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \frac{P}{L^2}$ .
- (b)  $\frac{4 \times 6P}{4 \times 2 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4}} = 4\sqrt{3} \frac{P}{L^2}$ .
- (c)  $\frac{4 \times 4 \times 6P}{4 \times 4 \times 2\frac{L^2\sqrt{3}}{4}} = 4\sqrt{3} \frac{P}{L^2}$ .
- (d) Generalizando, a razão entre o peso e a área total das asas com arestas de tamanho  $2^n L$  será dada por  $\frac{4^n \times 6P}{4^n \times 2\frac{L^2\sqrt{3}}{4}} = 4\sqrt{3} \frac{P}{L^2}$ . Neste caso, observamos que a razão entre o peso e a área total das asas da estrutura tetraédrica é constante e igual a  $4\sqrt{3} \frac{P}{L^2}$ .

**Questão 5.**

- (a) Não, pois as espessuras dos canudos são iguais. Para que esses canudos fossem semelhantes seria necessário que a espessura do canudo de comprimento  $2L$  fosse o dobro da espessura do canudo de comprimento  $L$ .
- (b) Não, pois as espessuras dos canudos permaneceram iguais.
- (c) As pipas tetraédricas de Alexander Graham Bell não contrariam o argumento de Newcomb pois, como as espessuras dos canudos são sempre iguais, as pipas de vários tamanhos não são semelhantes entre si. Apesar disto, como visto na questão 4, a razão entre o peso e a área total das asas das estruturas tetraédricas é constante, o que comprova que o tamanho pode ser aumentado mantendo-se constante a razão eficiência por peso.

**Questão 6.** Se observamos a figura podemos afirmar que as duas pipas tem asas com superfície de mesma área pois, na pipa  $A'B'C'D'$ , as duas metades das asas internas preenchem exatamente os “espaços” nos triângulos  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle A'C'D'$ , ou algebricamente, podemos calcular as áreas e verificar que ambas medem  $2L^2\sqrt{3}$ .

Área das asas da pipa $ABCD$	Área das asas da pipa $A'B'C'D'$
$2 \times \frac{(2L)^2\sqrt{3}}{4} = 2L^2\sqrt{3}$	$4 \times 2 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 2L^2\sqrt{3}$

Tabela B3: Áreas das asas das pipas tetraédricas  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$

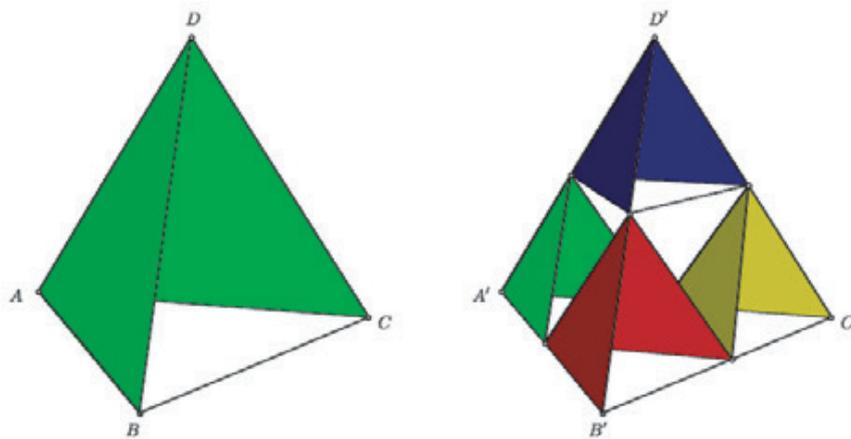


Figura B1: Pipas  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$