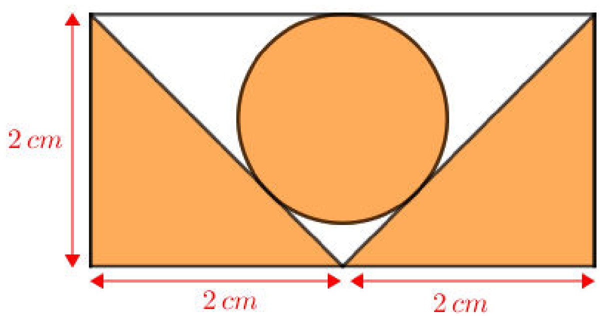
.Problema para ajudar na escola: Um desenho desafiador

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

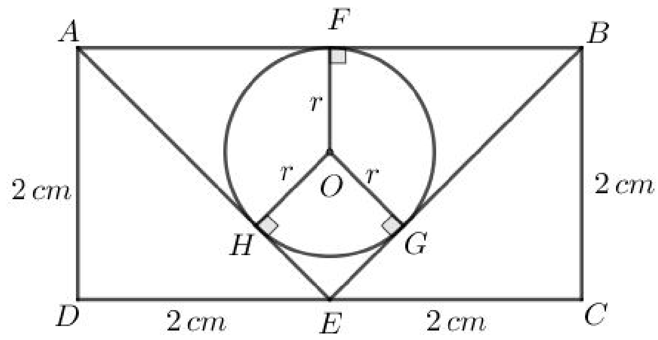
(**XX OPM**, 2001 – Adaptado) No interior de um retângulo, foram desenhados dois triângulos e uma circunferência, conforme mostra a figura.



Sabendo que a circunferência tangencia os três segmentos nos quais se apoia, quanto mede a área da região colorida?

Solução

Para facilitar a solução, vamos nomear o retângulo de $ABCD$, o centro da circunferência de O, seu raio de r e os seus pontos de tangência com relação aos segmentos nos quais ela se apoia de F, G e H, conforme indica a figura abaixo.



A área da região colorida é a soma de três áreas: as áreas dos triângulos AED e BEC e a área do círculo de centro em O e raio r.

► **Áreas dos triângulos AED e BEC**

As áreas dos triângulos são iguais e podem ser calculadas sem muita complicação, já que os triângulos em questão são triângulos retângulos e, portanto, seus catetos podem ser considerados como base e altura. Assim:

- $A_{ADE} = A_{BEC} = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2\,cm^2\,. \qquad (i)$

► **Área do círculo**

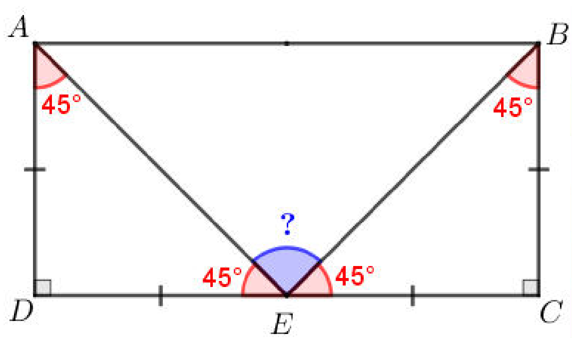
Aqui teremos um pouco mais de trabalho...

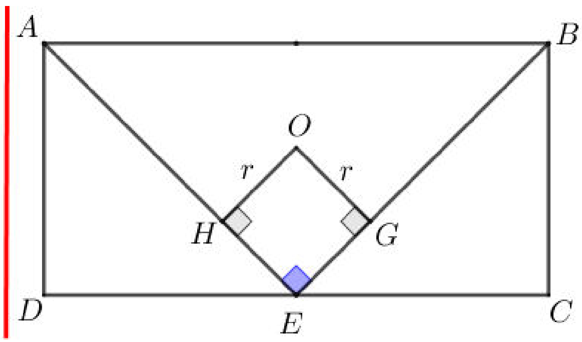
- Observe, inicialmente, que $H\hat{E}G$ é um ângulo reto.

  Com efeito, note que os triângulos retângulos AED e BEC são isósceles; logo, os ângulos das respectivas bases medem 45° cada. Com isso, a medida do ângulo $A\hat{E}B$ é $\boxed{180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ}$.

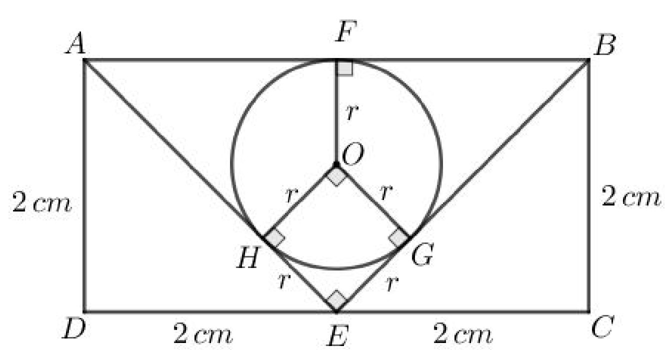
- Observe também que o quadrilátero $OGEH$ é um quadrado.

  Com efeito, note que os ângulos $O\hat{G}E$, $G\hat{E}H$ e $E\hat{H}O$ medem 90° cada; logo, o quarto ângulo interno do quadrilátero, $H\hat{O}G$, também mede 90° e, portanto, o quadrilátero $OGEH$ é um retângulo. Mas é um retângulo com dois lados adjacentes com o mesmo comprimento r; logo, é um quadrado, de fato.





Podemos então fazer um desenho mais completo da figura fornecida pelo problema e obter o valor de r, que permitirá obtermos a área do círculo que compõe a região colorida.



Vamos aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo OGE. Para isso, observe que o comprimento em cm do segmento OE, hipotenusa do triângulo, é $2-r$ e assim:

$$(2-r)^2 = r^2 + r^2$$
$$4 - 4r + r^2 = 2r^2$$
$$r^2 + 4r - 4 = 0. \qquad (ii)$$

Resolvendo a equação do segundo grau (ii) obtemos que:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2}$$
$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Mas r é o comprimento de um segmento e, portanto, maior do que zero. Assim, $r = 2\sqrt{2} - 2\ cm$.

Dessa forma, a área do círculo de centro em O e raio r é

- $A_{circ} = \pi\left(2\sqrt{2}-2\right)^2 = \pi\left(8 - 8\sqrt{2} + 4\right) = \pi\left(12 - 8\sqrt{2}\right)\ cm^2. \qquad (iii)$

► **Área da região colorida**

Por (i) e (iii), temos que a área da região colorida pode ser assim calculada:

$$A_{colorida} = A_{ADE} + A_{BEC} + A_{circ}$$
$$A_{colorida} = 2 + 2 + \pi\left(12 - 8\sqrt{2}\right)$$
$$A_{colorida} = 4 + \pi\left(12 - 8\sqrt{2}\right).$$

Portanto, a área da região colorida é $\boxed{4 + \pi\left(12 - 8\sqrt{2}\right)\ cm^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.