.Problema para ajudar na escola: Um desafio trigonométrico

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(**ONEM**, 2004 – Adaptado) Sejam x, y e z números reais, com $0 < x,\ y,\ z < \pi$, tais que

$$\begin{aligned} cos\,x + cos\,y + cos\,z &= 0; \\ cos\,2x + cos\,2y + cos\,2z &= 0; \\ cos\,3x + cos\,3y + cos\,3z &= 0. \end{aligned}$$

Determine TODOS os valores numéricos possíveis da soma $\boxed{sen\,x + sen\,y + sen\,z}$.

Lembretes

(1) $cos\,2a = 2cos^2 a - 1$.
(2) $cos\,3a = 4cos^3 a - 3cos\,a$.
(3) Se a , b e c são números reais tais que $a+b+c=0$, então $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Se você precisar de justificativas, clique no botão abaixo. (Não se esqueça de ocultar as informações depois de utilizá-las, para não sobrecarregar a página.)

Lembrete (1)

Da fórmula do cosseno da soma de dois números reais a e b, sabemos que:

$$cos(a+b) = cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b.$$

Assim, se $a=b$, segue que:

$$cos(a+a) = cos\,a \cdot cos\,a - sen\,a \cdot sen\,a$$
$$cos\,2a = cos^2 a - sen^2 a.$$

Mas a relação fundamental da trigonometria nos garante que $\boxed{sen^2 a + cos^2 a = 1}$; assim,

$$cos\,2a = cos^2 a - \left(1 - cos^2 a\right)$$

$cos\,2a = cos^2 a - 1 + cos^2 a$

$\boxed{cos\,2a = 2cos^2 a - 1}$.

Lembrete (2)

Da fórmula do cosseno da soma de dois números reais a e b, sabemos que:

$$cos(a+b) = cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b.$$

Assim, se $b = 2a$, segue que:

$$cos(a+2a) = cos\,a \cdot cos\,2a - sen\,a \cdot sen\,2a$$
$$cos(3a) = cos\,a \cdot cos\,2a - sen\,a \cdot sen\,2a.$$

Utilizando a igualdade anterior, temos que:

$$cos(3a) = cos\,a \cdot \left(2cos^2 a - 1\right) - sen\,a \cdot sen\,2a$$
$$cos(3a) = 2cos^3 a - cos\,a - sen\,a \cdot sen\,2a. \qquad (*)$$

Da fórmula do seno da soma de dois números reais a e b, temos que:

$$sen(a+b) = sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a$$

assim, se $a = b$, segue que:

$$sen(a+a) = sen\,a \cdot cos\,a + sen\,a \cdot cos\,a$$
$$sen(2a) = 2sen\,a \cdot cos\,a.$$

Substituindo essa última igualdade em $(*)$:

$$cos(3a) = 2cos^3 a - cos\,a - sen\,a \cdot (2sen\,a \cdot cos\,a)$$
$$cos(3a) = 2cos^3 a - cos\,a - 2sen^2 a \cdot cos\,a$$

e, utilizando mais uma vez a relação fundamental da trigonometria, vem que:

$$cos(3a) = 2cos^3 a - cos\,a - 2\left(1 - cos^2 a\right) \cdot cos\,a$$
$$cos(3a) = 2cos^3 a - cos\,a - 2cos\,a - 2cos^3 a$$
$$\boxed{cos(3a) = 4cos^3 a - 3cos\,a}.$$

Lembrete (3)

Sejam a, b e c números reais tais que $a + b + c = 0$.

Assim, $a = -b - c$ e, portanto, segue que:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (-b-c)^3 + b^3 + c^3 \\ &= -(b+c)^3 + b^3 + c^3 \\ &= -\left(b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3\right) + b^3 + c^3 \\ &= -b^3 - 3b^2c - 3bc^2 - c^3 + b^3 + c^3 \\ &= -3b^2c - 3bc^2 \\ &= 3bc\,(-b-c)\,. \end{aligned}$$

Como $-b - c = a$, então:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3bca = 3abc.$$

Solução

- Vamos, inicialmente, aplicar a identidade do **Lembrete (2)** na terceira equação fornecida pelo problema e fazer algumas continhas:

$$\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0$$
$$\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + \left(4\cos^3 y - 3\cos y\right) + \left(4\cos^3 z - 3\cos z\right) = 0$$
$$4\left(\cos^3 x + \cos^3 y + \cos^3 z\right) - 3\left(\cos x + \cos y + \cos z\right) = 0. \qquad (i)$$

Pela primeira equação fornecida pelo problema $\cos x + \cos y + \cos z = 0$; assim, segue de (i) que

$$4\left(\cos^3 x + \cos^3 y + \cos^3 z\right) = 0$$
$$\cos^3 x + \cos^3 y + \cos^3 z = 0. \qquad (ii)$$

Por outro lado, como $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, segue do **Lembrete (3)** que

$$\cos^3 x + \cos^3 y + \cos^3 z = 3 \cdot \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z. \qquad (iii)$$

De (ii) e (iii), temos que $\boxed{3 \cdot \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = 0}$, donde segue que $\boxed{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = 0}$.

Em um produto igual a 0, pelo menos um dos fatores é 0; assim, sem perda de generalidade, vamos supor que $\cos x = 0$.

Dessa forma, de $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, segue que

$$\cos y + \cos z = 0$$

ou seja,

$$\cos y = -\cos z. \qquad (iv)$$

- Vamos aplicar agora a identidade do **Lembrete (1)** na segunda equação fornecida pelo problema e fazer mais algumas continhas:

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$$
$$\left(2\cos^2 x - 1\right) + \left(2\cos^2 y - 1\right) + \left(2\cos^2 z - 1\right) = 0$$
$$2\left(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z\right) - 3 = 0$$
$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}\,.$$

Como estamos supondo $\cos x = 0$, então

$$\cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}. \qquad (v)$$

Substituindo (iv) em (v), obtemos que:

$$(\cos y)^2 + \cos^2 z = \frac{3}{2}$$
$$(-\cos z)^2 + \cos^2 z = \frac{3}{2}$$
$$(\cos z)^2 + \cos^2 z = \frac{3}{2}$$
$$\cos^2 z + \cos^2 z = \frac{3}{2}$$
$$2\cos^2 z = \frac{3}{2}$$
$$\cos^2 z = \frac{3}{4}$$
$$\cos z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por (iv), podemos afirmar que:

► Se $\cos z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então $\cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

► Se se $\cos z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então $\cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dessa forma, temos duas possibilidades para analisar:

(I) $\boxed{\cos x = 0}$, $\boxed{\cos z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ e $\boxed{\cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

e

(II) $\boxed{cos\, x = 0}$, $\boxed{cos\, z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ e $\boxed{cos\, y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Em cada possibilidade, vamos obter os valores de $sen\, x$, $sen\, y$ e $sen\, z$ e encontrar a soma $\boxed{sen\, x + sen\, y + sen\, z}$ solicitada no problema. Para isso, utilizaremos a relação fundamental da trigonometria: $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ e observaremos que $0 < x,\ y,\ z < \pi$ e, portanto, $sen\, x$, $sen\, y$, $sen\, z > 0$.

(I)

- $cos\, x = 0$

$$sen^2 x = 1 - cos^2 x$$
$$sen^2 x = 1 - 0^2$$
$$sen^2 x = 1 - 0$$
$$sen^2 x = 1$$
$$sen\, x = \pm 1$$

Como $sen\, x > 0$, $\boxed{sen\, x = 1}$.

- $cos\, z = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$sen^2 z = 1 - cos^2 z$$
$$sen^2 z = 1 - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$sen^2 z = 1 - \tfrac{3}{4}$$
$$sen^2 z = \tfrac{1}{4}$$
$$sen\, z = \pm\tfrac{1}{2}$$

Como $sen\, z > 0$, $\boxed{sen\, z = \dfrac{1}{2}}$.

- $cos\, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$sen^2 y = 1 - cos^2 y$$
$$sen^2 y = 1 - \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$sen^2 y = 1 - \tfrac{3}{4}$$
$$sen^2 y = \tfrac{1}{4}$$
$$sen\, y = \pm\tfrac{1}{2}$$

Como $sen\, y > 0$, $\boxed{sen\, y = \dfrac{1}{2}}$.

(II)

- $cos\, x = 0$

$$sen^2 x = 1 - cos^2 x$$
$$sen^2 x = 1 - 0^2$$
$$sen^2 x = 1 - 0$$
$$sen^2 x = 1$$
$$sen\, x = \pm 1$$

Como $sen\, x > 0$, $\boxed{sen\, x = 1}$.

- $cos\, z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$sen^2 z = 1 - cos^2 z$$
$$sen^2 z = 1 - \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$sen^2 z = 1 - \tfrac{3}{4}$$
$$sen^2 z = \tfrac{1}{4}$$
$$sen\, z = \pm\tfrac{1}{2}$$

Como $sen\, z > 0$, $\boxed{sen\, z = \dfrac{1}{2}}$.

- $cos\, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$sen^2 y = 1 - cos^2 y$$
$$sen^2 y = 1 - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$sen^2 y = 1 - \tfrac{3}{4}$$
$$sen^2 y = \tfrac{1}{4}$$
$$sen\, y = \pm\tfrac{1}{2}$$

Como $sen\, y > 0$, $\boxed{sen\, y = \dfrac{1}{2}}$.

Pelo exposto, a soma $\boxed{sen\, x + sen\, y + sen\, z}$ tem um valor único:

$$\boxed{sen\, x + sen\, y + sen\, z = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.