

# Clubes de Matemática da OBMEP

# Disseminando o estudo da matemática

Clubes de Matemática da OBMEP



## .Problema para ajudar na escola: Um algarismo de uma diferença



#### **Problema**

(A partir do 9º ano do E. F.)

Embora os números naturais x e y não sejam múltiplos de 10, o produto entre eles é uma potência de 10. Se x>y, que algarismo ímpar **NÃO** pode ser o dígito das unidades da diferença x-y?

### Solução 1

Sejam x e y números naturais não múltiplos de 10 tais que

 $x \cdot y = 10^n$  , com n um número natural não nulo.

Dessa forma, os únicos números primos que entram na decomposição dos números x e y são o 2 e o 5. Mas perceba que tanto x e y não podem ter simultaneamente fatores 2 e 5 em suas decomposições, pois, se assim o fosse, eles seriam múltiplos de 10.

Com isso x e y são da forma  $2^n$  e  $5^n$  e como x>y , então  $y=2^n$  e  $x=5^n$  .

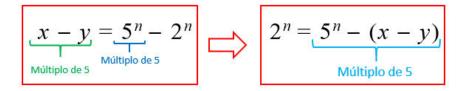
Particularmente, veja que:

- ullet Se n=1 , então  $y=2^1=2$  ,  $x=5^1=5\,$  e, portanto,  $x-y={\color{red}3}.$
- ullet Se n=2 , então  $y=2^2=4$  ,  $x=5^2=25\,$  e, portanto, x-y=2
- ullet Se n=3 , então  $y=2^3=8$  ,  $x=5^3=125\,$  e, portanto,  $x-y=117.\,$
- ullet Se n=4 , então  $y=2^4=16$  ,  $x=5^4=625\,$  e, portanto,  $x-y=609.\,$

A partir desses exemplos já vemos que o dígito das unidades da diferença x-y pode ser 1,3,7 ou 9. Assim, o único candidato a NÃO ser o dígito das unidades da diferença x-y é o 5.

#### Vamos mostrar que isso realmente ocorre!

Com efeito, observe que se o dígito das unidades da diferença x-y fosse 5, x-y seria um múltiplo de 5. Nesse caso, como  $x=5^n$  é um múltiplo de 5, então y necessariamente seria um múltiplo de 5, o que é impossível, visto que  $y=2^n$  é uma potência de 2.



Pelo exposto, o dígito das unidades da diferença  $x-y\,\,$  NÃO pode ser  $\overline{\bf 5}$  .

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.

### Solução 2

Sejam x e y números naturais não múltiplos de 10 tais que

 $x \cdot y = 10^n$  , com n um número natural não nulo.

Dessa forma, os únicos números primos que entram na decomposição dos números x e y são o 2 e o 5. Mas perceba que x e y não podem ter simultaneamente fatores 2 e 5 em suas decomposições, pois, se assim o fosse, eles seriam múltiplos de 10.

Com isso, x e y são da forma  $2^n$  e  $5^n$  e como x>y , então  $y=2^n$  e  $x=5^n$  .

Agora, observe que:

- Como qualquer potência de 5 termina em 5, então o último dígito do  $x \in 5$ .
- Vamos observar o último dígito das potências de 2:

$$2^{1} = 2$$
  $2^{5} = 32$   $2^{9} = 512$   $2^{13} = 8192$  ...  $2^{2} = 4$   $2^{6} = 64$   $2^{10} = 1024$   $2^{14} = 16384$  ...  $2^{3} = 8$   $2^{7} = 128$   $2^{11} = 2048$   $2^{15} = 32768$  ...  $2^{4} = 16$   $2^{8} = 256$   $2^{12} = 4096$   $2^{16} = 65536$  ...

Perceba que ciclicamente as potências de 2 terminam em 2, 4, 8 e 6. (ii)

Com base nas conclusões (i) e (ii), vamos esquematizar as quatro situações possíveis para a diferença x-y:

Observando os esqueminhas, vemos que o único algarismo ímpar que  ${\tt N\~AO}$  pode ser o dígito das unidades da diferença x-y é o  ${\tt 5}$  .

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.



Apoio





Realização







