# .Problema para ajudar na escola: Um algarismo de uma diferença

## Problema

**(A partir do 9º ano do E. F.)**

Embora os números naturais $x$ e $y$ não sejam múltiplos de $10$, o produto entre eles é uma potência de $10$.
Se $x > y$, que algarismo ímpar **NÃO** pode ser o dígito das unidades da diferença $x - y$ ?

## Solução 1

Sejam $x$ e $y$ números naturais não múltiplos de $10$ tais que

$x \cdot y = 10^n$ , com $n$ um número natural não nulo.

Dessa forma, os únicos números primos que entram na decomposição dos números $x$ e $y$ são o $2$ e o $5$. Mas perceba que tanto $x$ e $y$ não podem ter simultaneamente fatores $2$ e $5$ em suas decomposições, pois, se assim o fosse, eles seriam múltiplos de $10$.

Com isso $x$ e $y$ são da forma $2^n$ e $5^n$ e como $x > y$, então $\boxed{y = 2^n}$ e $\boxed{x = 5^n}$.

Particularmente, veja que:

- Se $n = 1$, então $y = 2^1 = 2$ , $x = 5^1 = 5$ e, portanto, $x - y = 3$.
- Se $n = 2$, então $y = 2^2 = 4$ , $x = 5^2 = 25$ e, portanto, $x - y = 21$.
- Se $n = 3$, então $y = 2^3 = 8$ , $x = 5^3 = 125$ e, portanto, $x - y = 117$.
- Se $n = 4$, então $y = 2^4 = 16$ , $x = 5^4 = 625$ e, portanto, $x - y = 609$.

A partir desses exemplos já vemos que o dígito das unidades da diferença $x - y$ pode ser $1, 3, 7$ ou $9$. Assim, o único candidato a NÃO ser o dígito das unidades da diferença $x - y$ é o $5$.

**Vamos mostrar que isso realmente ocorre!**

Com efeito, observe que se o dígito das unidades da diferença $x - y$ fosse $5$, $x - y$ seria um múltiplo de $5$. Nesse caso, como $x = 5^n$ é um múltiplo de $5$, então $y$ necessariamente seria um múltiplo de $5$, o que é impossível, visto que $y = 2^n$ é uma potência de $2$.

$$\underbrace{x-y}_{\text{Múltiplo de 5}} = \underbrace{5^n}_{\text{Múltiplo de 5}} - 2^n \quad \Rightarrow \quad 2^n = 5^n - \underbrace{(x-y)}_{\text{Múltiplo de 5}}$$

Pelo exposto, o dígito das unidades da diferença $x-y$ **NÃO** pode ser $\boxed{5}$.

---

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

## Solução 2

---

Sejam $x$ e $y$ números naturais não múltiplos de $10$ tais que

$x \cdot y = 10^n$ , com $n$ um número natural não nulo.

Dessa forma, os únicos números primos que entram na decomposição dos números $x$ e $y$ são o $2$ e o $5$. Mas perceba que $x$ e $y$ não podem ter simultaneamente fatores $2$ e $5$ em suas decomposições, pois, se assim o fosse, eles seriam múltiplos de $10$.

Com isso, $x$ e $y$ são da forma $2^n$ e $5^n$ e como $x > y$, então $\boxed{y = 2^n}$ e $\boxed{x = 5^n}$.

Agora, observe que:

- Como qualquer potência de $5$ termina em $5$, então o último dígito do $x$ é $5$. $\quad (i)$
- Vamos observar o último dígito das potências de $2$:

$$\begin{array}{llll}
2^1 = 2 & 2^5 = 32 & 2^9 = 512 & 2^{13} = 8192 \ \ldots \\
2^2 = 4 & 2^6 = 64 & 2^{10} = 1024 & 2^{14} = 16384 \ \ldots \\
2^3 = 8 & 2^7 = 128 & 2^{11} = 2048 & 2^{15} = 32768 \ \ldots \\
2^4 = 16 & 2^8 = 256 & 2^{12} = 4096 & 2^{16} = 65536 \ \ldots
\end{array}$$

Perceba que ciclicamente as potências de $2$ terminam em $2, 4, 8$ e $6$. $\quad (ii)$

Com base nas conclusões $(i)$ e $(ii)$, vamos esquematizar as quatro situações possíveis para a diferença $x-y$ :

$$\begin{array}{cc}
a\cdots b & 5 \\
c\cdots d & 2 \ - \\ \hline
e\cdots f & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
a\cdots b & 5 \\
c\cdots d & 4 \ - \\ \hline
e\cdots f & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
a\cdots b & {}^{1}5 \\
c\cdots d & 8 \ - \\ \hline
e\cdots f & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
a\cdots b & {}^{1}5 \\
c\cdots d & 6 \ - \\ \hline
e\cdots f & 9
\end{array}$$

Observando os esqueminhas, vemos que o único algarismo ímpar que **NÃO** pode ser o dígito das unidades da diferença $x-y$ é o $\boxed{5}$.

---

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.