.Problema para ajudar na escola: Três números naturais complicados de se achar

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Determinar todos os números naturais a, b, c, com $0 < a \leqslant b \leqslant c$, tais que

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3.$$

Solução

Observe, inicialmente, que se $0 < x < y$, então $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$ e, consequentemente, $1+\dfrac{1}{y} < 1+\dfrac{1}{x}$.

Dessa forma:

$$\textbf{quanto menor(maior) o valor de } z\textbf{, maior(menor) o valor da expressão } 1+\frac{1}{z}\,. \qquad (i)$$

Sejam, então, a, b, c números naturais, com $0 < a \leqslant b \leqslant c$.

(1) Veja que, se tivéssemos números naturais a, b, c, com $3 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$, por (i), o maior valor que o produto

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

poderia assumir seria quando $a=b=c=3$, o que resultaria em

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\,.$$

Mas observe que $\dfrac{64}{27} < 3$; assim, não podemos ter $3 \leqslant a$ e, com isso, para que a igualdade se verifique, devemos ter $\boxed{a=1}$ ou $\boxed{a=2}$.

(2) Vamos supor $a=2$ e então temos $\boxed{2=a\leqslant b\leqslant c}$.

(2.1) Se $3 \leqslant b$, a observação (i), nos indica que o maior valor do produto

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

ocorre quando $b=c=3$ e esse valor é

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{48}{18}<3\,.$$

Assim, não podemos ter $3 \leqslant b$ e, com isso, para que a igualdade se verifique, a única hipótese seria $b=2$, já que $2=a\leqslant b$.

(2.2) Vamos, então, supor $a=b=2$ e tentar encontrar valores para o número natural c. Vejamos:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=1$$

$$3+\frac{3}{c}=4$$
$$3c+3=4c$$
$$c=3\,.$$

Com isso temos uma primeira solução para o problema: $\boxed{a=2\,;b=2\;;\,c=3}$.

(3) Vamos supor $a=1$ e agora temos $\boxed{1=a\leqslant b\leqslant c}$.

(3.1) Neste caso, se $5\leqslant b$, a observação (i) , nos indica que o maior valor do produto

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

ocorre quando $b=c=5$:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{72}{25}<3\,.$$

Assim, aqui não podemos ter $5\leqslant b$. Logo, para que a igualdade se verifique, as únicas hipóteses seriam $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$ e devemos testá-las uma a uma para tentar encontrar um valor natural para c .

(3.2) Substituindo $a=b=1$ na igualdade, segue que:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$4\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$4+\frac{4}{c}=3$$
$$4c+4=3c$$
$$c=-4\,,$$

mas -4 não é um número natural.

(3.3) Substituindo $a=1$ e $b=2$ na igualdade, teríamos:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$2\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$1+\frac{1}{c}=1$$
$$\frac{1}{c}=0\,,$$

o que é impossível!

(3.4) Substituindo agora $a=1$ e $b=3$ na igualdade, vem que:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$2\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$8\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=9$$
$$8+\frac{8}{c}=9$$
$$8c+8=9c\,,$$
$$c=8$$

e obtemos mais uma solução para o problema: $\boxed{a=1\,;b=3\;;\,c=8}$.

(3.5) Substituindo $a=1$ e $b=4$ na igualdade, vem que:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$2\cdot\frac{5}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$
$$5\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=6$$
$$5+\frac{5}{c}=6$$
$$5c+5=6c$$
$$c=5\,,$$

e conseguimos outra solução para o problema: $\boxed{a=1\,;b=4\;;\,c=5}$.

Portanto, existem somente três soluções para o problema:

$\boxed{a=2\,;b=2\,;\,c=3}$, $\boxed{a=1\,;b=3\;;\,c=8}$ e $\boxed{a=1\,;b=4\;;\,c=5}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.