

## .Problema para ajudar na escola: Traslados para um evento



### Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Camila está organizando traslado aéreo para 1000 pessoas e 60 toneladas de bagagens, da cidade  $C_1$  para a cidade  $C_2$ , onde ocorrerá um megaevento.

A empresa contratada para efetuar os traslados tem condições de disponibilizar doze aviões do tipo **A** e oito aviões do tipo **B**, com as seguintes características:

**Aeronave A:** transporta até 200 passageiros e 6 toneladas de bagagens.

**Aeronave B:** transporta até 100 passageiros e 15 toneladas de bagagens.

Todos os voos decolarão e pousarão, praticamente, nos mesmos horários.

**(a)** A princípio, considerando apenas a quantidade de aviões de cada tipo, quais as possíveis maneiras que Camila terá para organizar os traslados, independentemente de quantos e quais passageiros vão em cada avião?

**(b)** A locação de um avião do tipo **A** custa R\$ 400 000,00 e a de um avião do tipo **B** custa R\$ 100 000,00. Se Camila dispõe de R\$ 2 400 000,00 para os traslados, quais são as possibilidades que ela tem? Dessas, quais as duas mais baratas? E as duas mais caras?

**Observação:** O problema deve ser resolvido utilizando-se um plano cartesiano  $xOy$ .

### Solução 1

**(a)** Sejam  $x$  e  $y$  as quantidades de aeronaves dos tipos **A** e **B** a serem utilizadas, respectivamente. Assim, a partir dos dados do problema, vamos estabelecer as restrições para  $x$  e  $y$ :

**(1)** Serão contratados  $x$  do tipo **A** e  $y$  do tipo **B**. Como cada aeronave do tipo **A** transporta até 200 passageiros, cada aeronave do tipo **B** transporta até 100 passageiros e 1 000 pessoas devem ser transportadas, a capacidade de todos os aviões deve chegar, no mínimo, a essa quantidade de 1 000 pessoas. Logo:

- $200x + 100y \geq 1000$ .

**(2)** Como cada aeronave do tipo **A** transporta até 6 toneladas de bagagens, cada aeronave do tipo **B** transporta até 15 toneladas de bagagens e 60 toneladas devem ser transportadas, a capacidade de transporte de todos os aviões deve chegar, no mínimo, a 60 toneladas. Logo:

- $6x + 15y \geq 60$ .

**(3)** Camila só dispõe de doze aeronaves do tipo **A** e oito do tipo **B**. Assim:

- $x \leq 12$  e  $y \leq 8$ .

**(4)** Por outro lado, não se pode contratar um número negativo de aeronaves. Portanto:

- $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

Por **(1)**, **(2)**, **(3)** e **(4)**, a solução do item (a) é dada pelos pares ordenados naturais  $(x, y)$  tais que:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 12 \\ y \leq 8 \\ 200x + 100y \geq 1000 \\ 6x + 15y \geq 60 \end{cases} \quad (i)$$

Nada impediria que construíssemos uma tabela com todos os valores naturais de  $x$  e  $y$  tais que  $x \leq 12$  e  $y \leq 8$  e avaliássemos as somas  $200x + 100y$  e  $6x + 15y$ . No entanto, seriam  $13 \times 9 = 117$  situações nas quais as duas somas seriam avaliadas, ou seja, teríamos que fazer  $117 \times 2 = 234$  somas! Por isso é que no problema foi sugerida a utilização de um plano cartesiano  $xOy$ . Assim, a solução do item **(a)** do problema são os pontos de coordenadas naturais  $P = (x, y)$  do plano cartesiano  $xOy$  que satisfazem simultaneamente às seguintes condições:

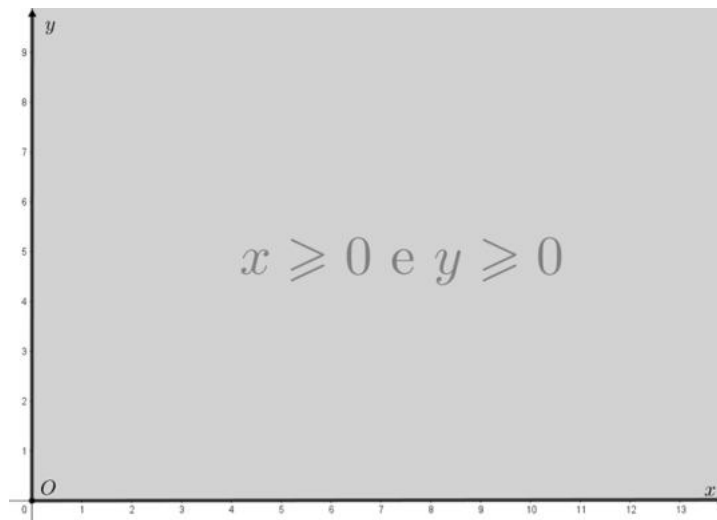
$$\boxed{x \geq 0 \text{ e } y \geq 0} \quad ; \quad \boxed{x \leq 12} \quad ; \quad \boxed{y \leq 8} \quad ; \quad \boxed{200x + 100y \geq 1000} \quad ; \quad \boxed{6x + 15y \geq 60} .$$

Então, vamos estudar cada uma dessas condições isoladamente em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , para depois analisarmos as cinco simultaneamente e obtermos as soluções cujas coordenadas são números naturais.

- $x \geq 0$  e  $y \geq 0$

Os pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem essas duas condições são:

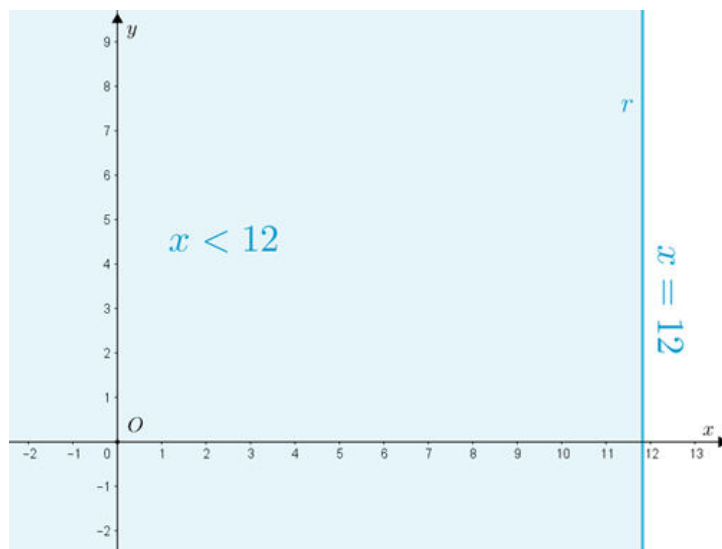
- aqueles que estão sobre o semieixo não negativo  $Ox$  ( $x \geq 0$  e  $y = 0$ ),
- aqueles que estão sobre o semieixo não negativo  $Oy$  ( $y \geq 0$  e  $x = 0$ ),
- aqueles que estão no chamado Primeiro Quadrante do plano cartesiano  $xOy$ , ou seja, à direita do eixo  $y$  e acima do eixo  $x$  ( $x > 0$  e  $y > 0$ ).



- $x \leq 12$

Os pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem esta condição são:

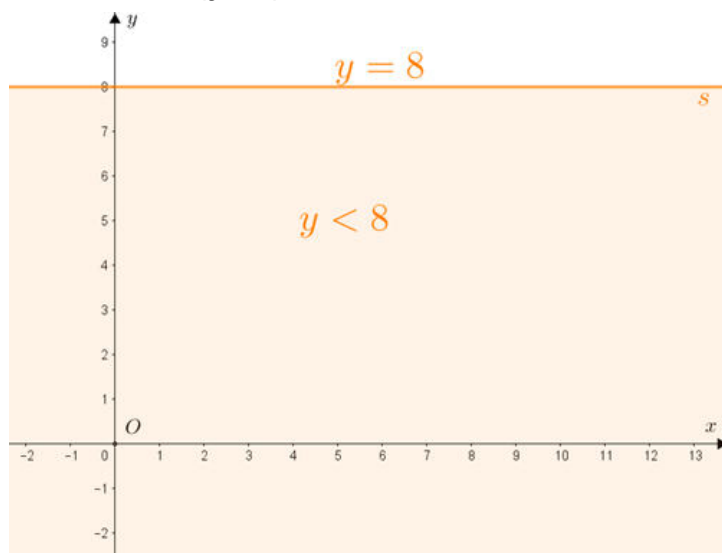
- aqueles que estão sobre a reta  $r$  definida por  $x = 12$ ,
- aqueles que estão à esquerda da reta  $r$  ( $x < 12$ ).



•  $y \leq 8$

Os pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem esta condição são:

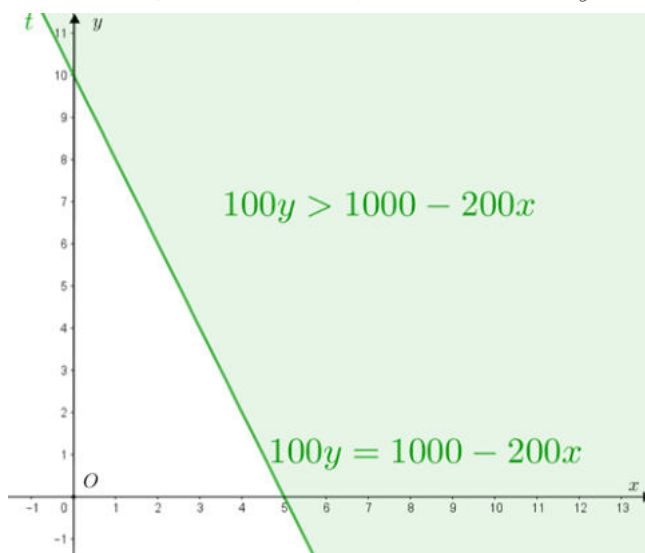
- aqueles que estão sobre a reta  $s$  definida por  $y = 8$ ,
- aqueles que estão abaixo da reta  $s$  ( $y < 8$ ).



•  $200x + 100y \geq 1000$

Os pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem esta condição são:

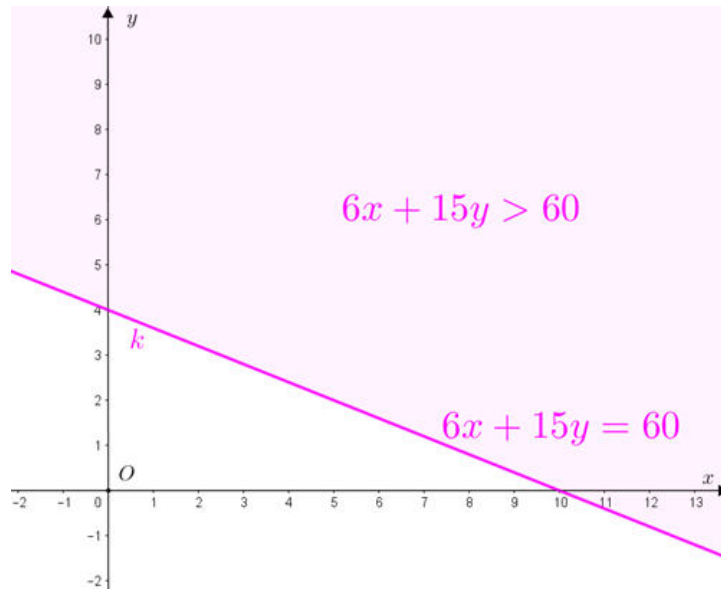
- aqueles que estão sobre a reta  $t$  definida por  $y = 10 - 2x$  (e satisfazem a igualdade  $200x + 100y = 1000$ ),
- aqueles que estão acima da reta  $t$  (e satisfazem a desigualdade  $200x + 100y > 1000$ ).



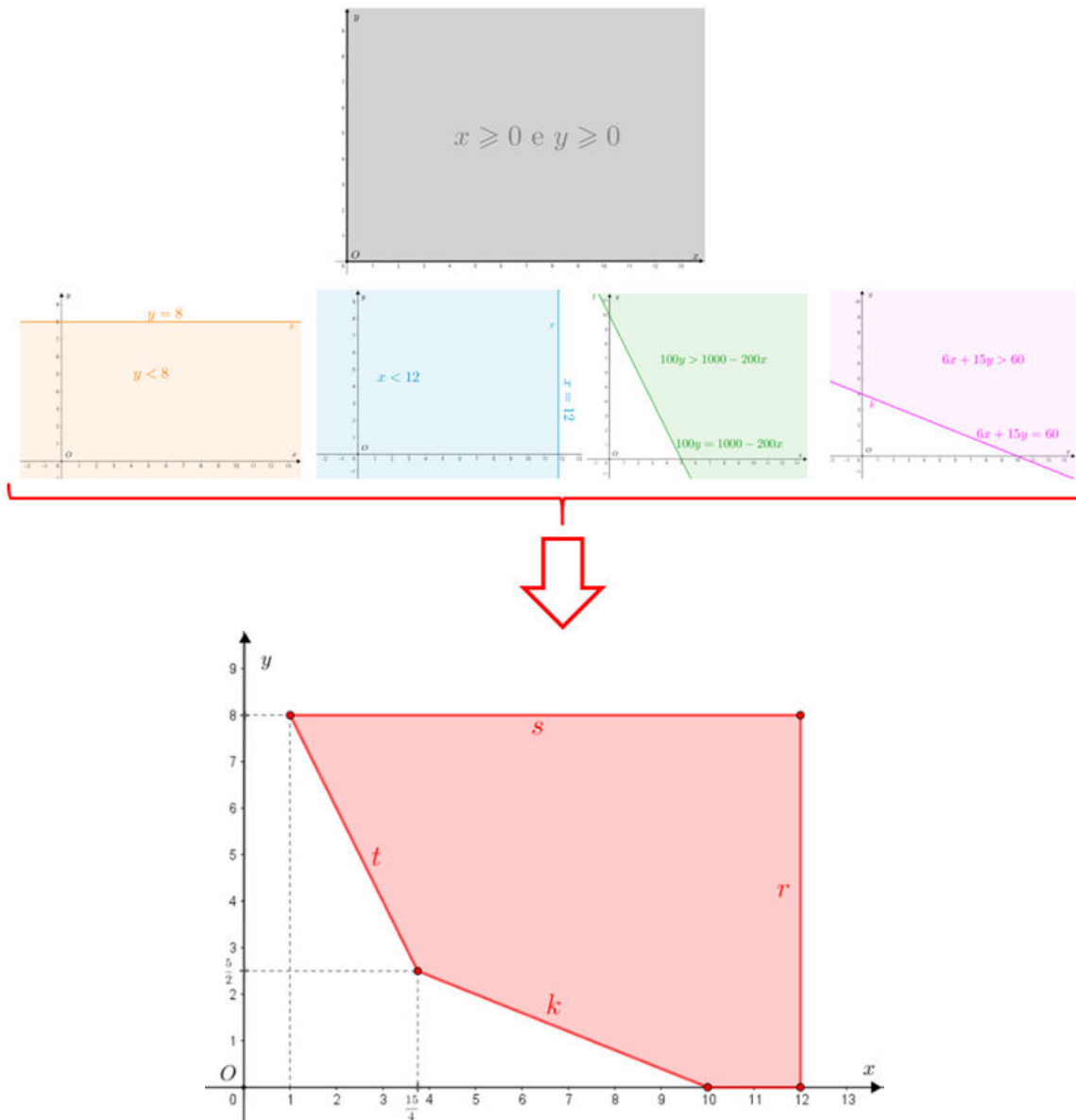
•  $6x + 15y \geq 60$

Os pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem esta condição são:

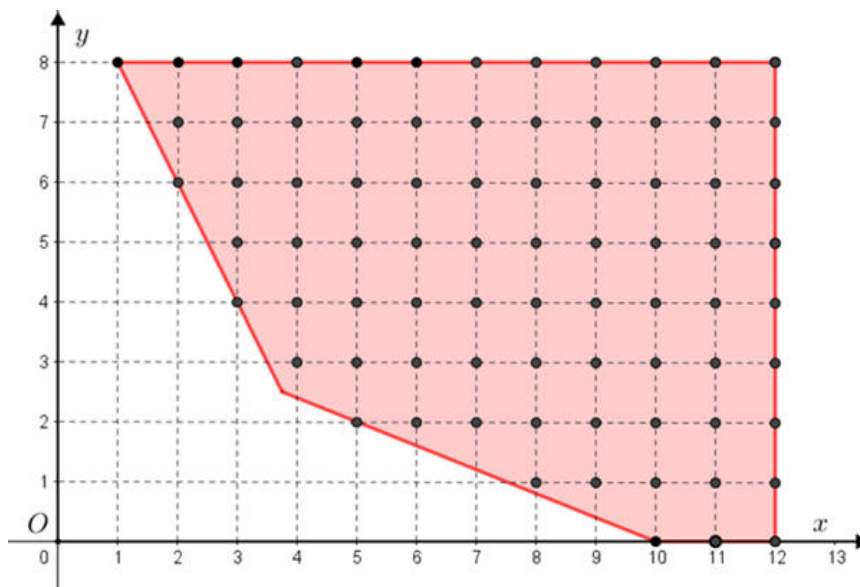
- aqueles que estão sobre a reta  $k$  definida por  $y = \frac{20 - 2x}{5}$  (e satisfazem a igualdade  $6x + 15y = 60$ ),
- aqueles que estão acima da reta  $k$  (e satisfazem a desigualdade  $6x + 15y > 60$ ).



Fazendo a interseção das cinco regiões acima, e lembrando que a primeira nos obriga a trabalhar no primeiro quadrante e na parte não negativa dos dois eixos do plano cartesiano, obtemos a solução do sistema (i) em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .



Como as opções de Camila são dadas por pares ordenados  $(x, y)$ , com  $x$  e  $y$  números naturais, podemos contá-las na figura a seguir e concluir que ela tem **79** maneiras para organizar os traslados, sem levar em consideração quantos e quais passageiros vão em cada avião e se a bagagem de cada passageiro vai no mesmo avião dele.



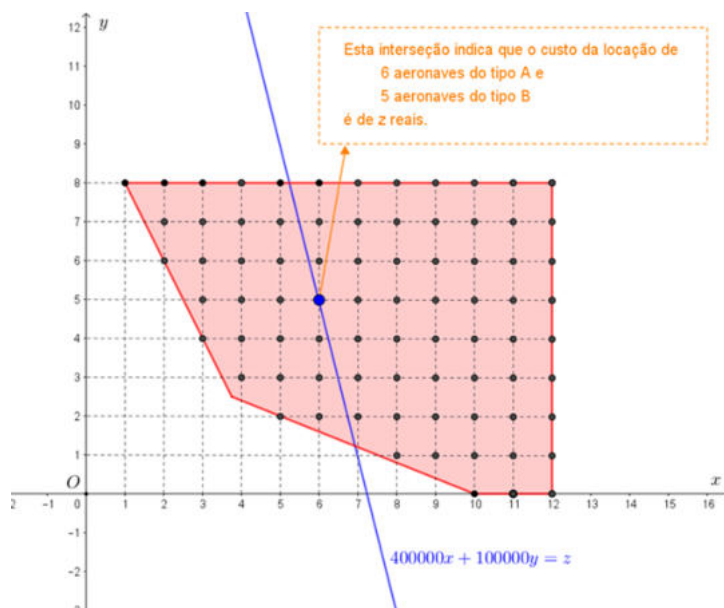
**(b)** A locação de um avião do tipo **A** custa R\$ 400 000,00 e a de um avião do tipo **B** custa R\$ 100 000,00. Assim, se  $x$  e  $y$  são, respectivamente, as quantidades de aeronaves dos tipos **A** e **B** a serem utilizadas nos traslados, podemos definir o custo da locação da seguinte forma:  $400000x + 100000y$ .

Temos, então uma função  $G$  de duas variáveis, definida por  $G(x, y) = 400000x + 100000y$ , para a qual precisamos inicialmente determinar quantos dos 79 pares ordenados  $(m, n)$  do item **(a)** são tais que  $G(m, n) \leq 2400000$ .

Mais uma vez, poderíamos calcular  $G(m, n)$  para cada um dos 79 pares ordenados, o que daria um pouco de trabalho. Mas note que, para cada número  $k$ , a equação  $400000x + 100000y = k$  descreve uma reta.

Assim, podemos analisar geometricamente a família de retas paralelas descritas por  $400000x + 100000y = z$ , para números naturais  $z$  variando de 0 a 2 400 000, no plano cartesiano no qual esteja representada a solução do item anterior.

A interseção de cada uma dessas retas com a região obtida na solução do item **(a)** determina os pontos que fornecem a quantidade de aeronaves dos dois tipos cujo preço de locação é o número  $z$  que define a reta em questão.



Para facilitar a análise, podemos utilizar o applet abaixo.

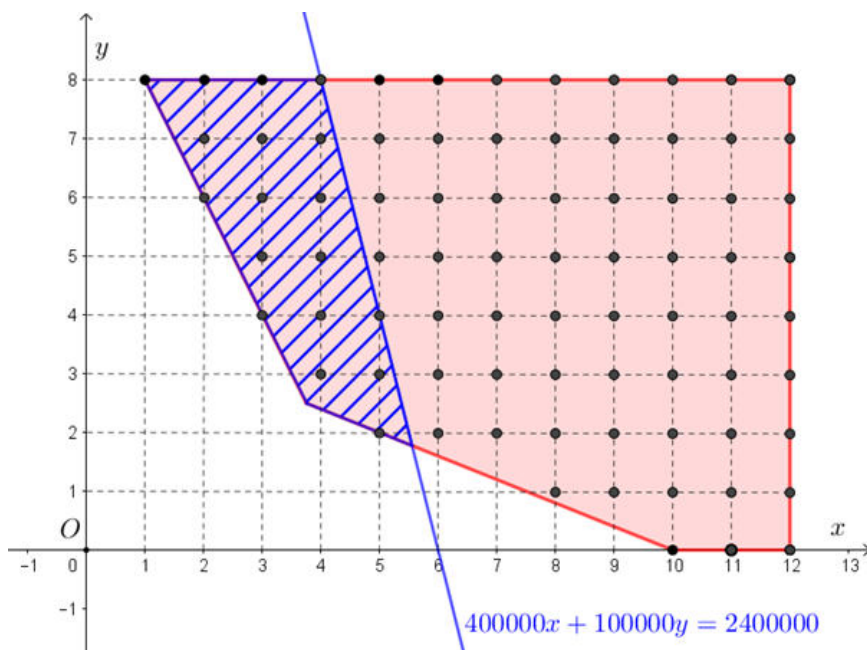
No aplicativo podemos visualizar um plano cartesiano  $xOy$  e os pontos que representam as 79 maneiras de se organizar os traslados segundo as condições do item **(a)**. Vemos também a reta definida pela equação  $400000x + 100000y = 0$ ; esta é a primeira reta da família de retas  $400000x + 100000y = z$ , na qual a variável  $z$  representa o preço final pago pela locação de  $x$  aeronaves do tipo **A** e  $y$  do tipo **B**. As demais retas dessa família são obtidas movimentando-se horizontalmente o ponto que aparece na parte inferior direita do

aplet, sobre o segmento verde. Esse ponto indicará valores naturais de 0 a 2400000, valores estes que representarão preços de R\$ 0,00 a R\$ 2 400 000,00 para locação de  $x$  aeronaves do tipo **A** e de  $y$  aeronaves do tipo **B**.

Para cada reta obtida com a movimentação do ponto **Preço**, a sua equação será exibida na parte superior do applet.

**Clique AQUI para abrir o applet.**

Com a reta definida quando Preço = 2400000 ( $400000x + 100000y = 2400000$  ou simplesmente  $4x + y = 24$ ), fica definida uma nova região no plano cartesiano  $xOy$  que nos mostra quantas das 79 maneiras que Camila tem para organizar os traslados custam R\$ 2 400 000,00 ou menos. Vejam na próxima figura.



Portanto, Camila tem **18** maneiras de organizar os traslados, respeitando o limite total de R\$ 2 400 000,00.

Com o auxílio do applet, podemos ver que os preços dos traslados crescem à medida que as retas  $r$  se deslocam da esquerda para direita, assim:

- as duas opções mais baratas totalizam:

**R\$ 1 188 000,00**, sendo utilizadas 1 aeronave do tipo **A** e 8 do tipo **B**

**R\$ 1 400 000,00**, sendo utilizadas 2 aeronaves do tipo **A** e 6 do tipo **B**;

- as duas opções mais caras totalizam:

**R\$ 2 400 000,00**, sendo utilizadas 4 aeronaves do tipo **A** e 8 do tipo **B**, ou 5 aeronaves do tipo **A** e 4 do tipo **B**;

**R\$ 2 300 000,00**, sendo utilizadas 4 aeronaves do tipo **A** e 7 do tipo **B**, ou 5 aeronaves do tipo **A** e 3 do tipo **B**.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

## Solução 2

Quem optou por fazer as contas e construir uma tabela para o item **(a)** e outra para o item **(b)** pode conferir os resultados com as tabelas que disponibilizamos a seguir.

- Esta tabela foi construída para se verificar em quantas situações aeronaves do tipo **A** e do tipo **B** satisfazem as condições do item **(a)**.

**Tabela com número de passageiros e toneladas de bagagens**

- Esta tabela foi construída para se verificar em quantas situações aeronaves do tipo **A** e do tipo **B** satisfazem as condições do item **(b)**.

### Tabela com número de passageiros, toneladas de bagagens e preço da locação

As duas tabelas foram construídas no **Excel**. Disponibilizamos abaixo um arquivo contendo-as.

Abram esse arquivo e tentem entender como elas foram construídas. Observem também que é possível definirmos funções que fornecem o número de opções para cada item do problema.

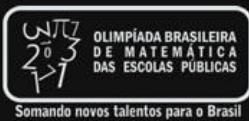
O **Excel** é muito mais do que um editor para se formatar planilhas. Às vezes ele opera verdadeiros milagres...

**Observação:** Para abrir o arquivo, você precisa ter o **Excel** instalado em seu computador.

[Arquivo](#)

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA,  
INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

MINISTÉRIO DA  
EDUCAÇÃO

