.Problema para ajudar na escola: Todas as diferenças

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(**Um Círculo Matemático de Moscou** – Adaptado) Amanda escolheu onze números naturais e, dois a dois, calculou todas as diferenças possíveis entre esses números.
É possível garantir que Amanda tenha encontrado alguma diferença divisível por 5?
E por 10?

Ajuda para as Soluções 1 e 2

Princípio das casas de pombos: Se tivermos $n+1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter mais de um pombo.

(Se você não se conhece esse Princípio, clique **AQUI**.)

Solução 1

O último algarismo de qualquer número natural é $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ ou 9, ou seja, são dez possibilidades.
Assim, como Amanda escolheu onze números, na pior das hipóteses, dois deles terminam com o mesmo algarismo.
Essa afirmação é bastante intuitiva, mas é garantida matematicamente pelo Princípio das casas de pombos: temos 10 algarismos finais (casas) para serem associados a 11 números (pombos); então pelo menos um algarismo final deverá ser associado a mais de um número.
Dessa forma, a diferença de dois dos números que têm o mesmo algarismo final será um número que termina em zero:

$$a_1a_2\cdots u - b_1b_2\cdots u = c_1c_2\cdots 0\,.$$

Bom, um número que termina em zero é divisível por 10 e, consequentemente, por 5. Assim, Amanda com certeza encontrou pelo menos uma diferença divisível por 5 e por 10.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Ajuda para a Solução 2

Sejam n e a números naturais, com $a\neq 0$.
O que acontece com o quociente e o resto da divisão de n por a?

Observemos...

$$\begin{array}{r|l} n & a \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Ao dividirmos n por a encontraremos um quociente q e um resto r, naturais e únicos, tais que:
$(1)\ 0\leq r<a \qquad (2)\ n=q\times a+r\,.$

Solução 2

Embora seja possível resolver os itens **(a)** e **(b)** simultaneamente, vamos resolvê-los separadamente para reforçar o raciocínio que utilizaremos.

(a) Utilizando a segunda **Ajuda**, observamos que, ao dividir um número natural por 5, podemos obter cinco restos: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Assim, temos 5 restos para serem associados aos 11 números escolhidos por Amanda e com isso, pelo Princípio das casas de pombos, pelo menos um resto deverá ser associado a mais de um desses números, digamos números x e y.
Utilizando a segunda **Ajuda** novamente, temos:

$$x = 5\,q_1 + r \quad \text{e} \quad y = 5\,q_2 + r \text{ , com } r,\ q_1,\ q_2 \in \mathbb{N} \text{ tais que } 0 \leq r < 5.$$

Dessa forma, supondo sem perda de generalidade que $x > y$, obtemos que

$$x - y = 5\,(q_1 - q_2) + 0 \text{ , com } q_1 - q_2 \in \mathbb{N}.$$

Pela unicidade do resto em uma divisão, concluímos que a diferença $x - y$ é divisível por 5.

(b) Utilizando a segunda **Ajuda**, observamos que, ao dividir um número natural por 10, podemos obter dez restos: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$. Assim, temos 10 restos para serem associados aos 11 números escolhidos por Amanda.
Logo, pelo Princípio das casas de pombos, pelo menos um resto deverá ser associado a mais de um desses números, digamos os números t e z.
Utilizando a segunda **Ajuda** novamente, temos:

$$t = 10\,q_3 + r_1 \quad \text{e} \quad z = 10\,q_4 + r_1 \text{ , com } r_1,\ q_3,\ q_4 \in \mathbb{N} \text{ tais que } 0 \leq r_1 < 10.$$

Dessa forma, supondo sem perda de generalidade que $t > z$, obtemos que

$$t - z = 10\,(q_3 - q_4) + 0 \text{ , com } q_3 - q_4 \in \mathbb{N}.$$

Pela unicidade do resto em uma divisão, concluímos que a diferença $t - z$ é divisível por 10.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.