.Problema para ajudar na escola: Ternas ordenadas

Problema

Determinar todas as ternas ordenadas de números naturais não nulos (x, y, z) tais que

$$\boxed{\frac{3xy-1}{xyz+1}}$$

seja um número inteiro positivo.

Ajuda

Se m e n são números naturais (ou inteiros), com $n \neq 0$, o que significa $\dfrac{m}{n}$ ser um número natural (ou inteiro)?

Por que $\dfrac{6}{2}$ é um número natural e $\dfrac{5}{4}$ não é?

A resposta para essas perguntas (e a dica para o problema) é, simplesmente, a definição de divisor ...

Especificamente, as respostas da segunda pergunta são:

- $6 = 3 \times 2$ e 3 é um número natural.
- Não existe um número natural (ou inteiro) k tal que $5 = k \times 4$.

Para o problema, basta observar que se $\dfrac{3xy-1}{xyz+1}$ é um número natural, então $xyz+1$ é divisor de $3xy-1$, ou seja, $3xy-1$ é da forma $3xy-1 = k \times (xyz+1)$, com $k \in \mathbb{N}$.

Solução

Como $\dfrac{3xy-1}{xyz+1}$ é um número natural não nulo, então existe um número natural não nulo n tal que $3xy-1 = n(xyz+1)$.

Assim, segue que

$$3xy - 1 = xyzn + n$$
$$xy(3-nz) = n+1$$
$$3 - nz = \frac{n+1}{xy},$$

uma vez que $xy \neq 0$.

Mas $\dfrac{n+1}{xy} > 0$; logo, $3 - nz > 0$, ou ainda, $0 < nz < 3$, já que x, y, n são positivos.

Dessa forma, temos que $nz = 1$ ou $nz = 2$.

Agora é só analisar as possibilidades para n e z e obter os consequentes valores para (x, y), sabendo que $xy = \dfrac{n+1}{3-nz}$.

Possibilidades para n e z: $\boxed{n = 1\,,\ z = 1}$; $\boxed{n = 1\,,\ z = 2}$; $\boxed{n = 2\,,\ z = 1}$.

- **Caso 1:** $n = 1\,,\ z = 1$

  Como

  $$xy = \frac{n+1}{3-nz} = \frac{2}{2} = 1,$$

então, só temos uma possibilidade para x e y: $x=1$ e $y=1$.

Neste caso, temos a nossa primeira terna ordenada: $\boxed{(x,y,z)=(1,1,1)}$.

- **Caso 2:** $n=1\,,\ z=2$

  Aqui,

  $$xy=\frac{n+1}{3-nz}=\frac{2}{1}=2,$$

  então, temos as seguintes possibilidades para x e y: $x=1$ e $y=2$ ou $x=2$ e $y=1\,.$

  Neste caso, temos mais duas ternas ordenadas: $\boxed{(x,y,z)=(1,2,2)}$ e $\boxed{(x,y,z)=(2,1,2)}$.

- **Caso 3:** $n=2\,,\ z=1$

  Agora,

  $$xy=\frac{n+1}{3-nz}=\frac{3}{1}=3,$$

  e temos as seguintes possibilidades para x e y: $x=1$ e $y=3$ ou $x=3$ e $y=1\,.$

  Neste caso, temos outras duas ternas ordenadas: $\boxed{(x,y,z)=(1,3,1)}$ e $\boxed{(x,y,z)=(3,1,1)}$.

Portanto, são cinco as ternas ordenadas (x,y,z) que satisfazem as condições do problema.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.