.Problema para ajudar na escola: Subconjuntos de um conjunto

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Quantos subconjuntos A, B e C do conjunto $\{m, p, q, t\}$ podemos formar, de modo que:

- $A \cap B \cap C = \emptyset$,
- $A \cap B \neq \emptyset$ e
- $A \cap C \neq \emptyset$.

AJUDAS

✏️ **Diagramas de Venn** são representações esquemáticas que permitem visualizarmos conjuntos como se fossem regiões do plano. Podemos utilizar esse tipo de representação para organizar os dados de determinados problemas e visualizar melhor um caminho para resolvê-los. A partir de um conjunto universo, os vários conjuntos envolvidos no problema são limitados por figuras fechadas, como círculos, quadrados, retângulos e losangos. O interior de cada figura representa os elementos do respectivo conjunto.

(Se você não se lembra desses diagramas, seria interessante dar uma passadinha **nesta Sala de Estudo**.)

✏️ **Combinação simples**: Uma das maneiras de agruparmos elementos de um dado conjunto é escolhê-los levando-se em consideração apenas a sua natureza, sem se importar em que ordem eles foram escolhidos ou apresentados. Esse tipo de agrupamento de elementos é denominado uma ***Combinação simples***. Quando escolhemos r dentre n elementos de um conjunto, dizemos que estamos definindo uma Combinação simples de n elementos tomados r a r. Esse número é denotado por $C_{n,r}$ ou C_n^r e assim definido:

$$C_{n,r} = C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \text{ com } n, r \in \mathbb{N} \text{ e } r \leqslant n\ .$$

✏️ **Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo**: Se

- um evento **E1** puder ocorrer de m_1 maneiras,
- um evento **E2** puder ocorrer de m_2 maneiras,
- ...
- um evento **Ek** puder ocorrer de m_k maneiras

e todos esses eventos forem independentes entre si, então a quantidade de maneiras em que os k eventos ocorrem ao mesmo tempo é

$\boxed{m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k}$.

(Se você não se lembra desse Princípio, seria interessante dar uma passadinha **nesta Sala de Estudo**.)

Princípio Aditivo: Se

- um evento **E1** puder ocorrer de m_1 maneiras,
- um evento **E2** puder ocorrer de m_2 maneiras,
- . . .
- um evento **Ek** puder ocorrer de m_k maneiras

e todos esses eventos forem independentes entre si, então a quantidade de maneiras em que os k eventos ocorrem um de cada vez é

$\boxed{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}$.

(Com o princípio aditivo podemos determinar de quantas maneiras pode ser realizada uma atividade que tem várias alternativas a serem desenvolvidas, das quais apenas uma pode ser escolhida de cada vez.)

Solução

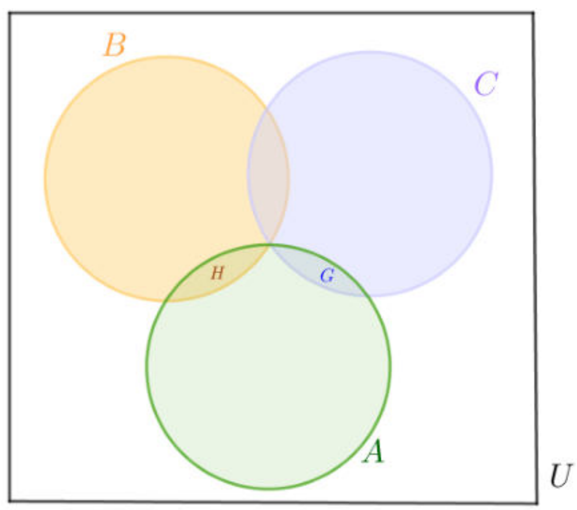
Vamos fazer um Diagrama de Venn para ajudar na visualização dos conjuntos que podemos formar. Para isso, observe que:

▶ $A \cap B \neq \emptyset$. Vamos denotar esse conjunto interseção por H; assim, $\boxed{H = A \cap B}$.

▶ $A \cap C \neq \emptyset$. Vamos denotar esse conjunto interseção por G; logo, $\boxed{G = A \cap C}$.

▶ $A \cap B \cap C = \emptyset$; assim, essa interseção não será representada no nosso diagrama.

▶ Não temos dados que garantam que $A \cup B \cup C = \{m,\ p,\ q,\ t\}$; logo, utilizaremos na nossa representação um conjunto universo U para que possamos colocar os possíveis elementos que não estejam em nenhum dos conjuntos A, B ou C .



Vamos resolver o problema distribuindo os quatro elementos $m,\ p,\ q$ e t nas sete regiões que compõem o diagrama acima:

▶ elementos apenas de A;

▶ elementos apenas de B;

▶ elementos apenas de C;

▶ elementos apenas de G;

▶ elementos apenas de H;

▶ elementos de B e C, mas não de A;

▶ elementos que não são de A, nem de B e nem de C .

Observe que, como $A \cap B \neq \emptyset$ e $A \cap C \neq \emptyset$, então devemos colocar pelo menos um elemento em cada região G e H; e esses elementos não podem ser o mesmo, já que $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Cada distribuição corresponderá a uma definição de conjuntos A, B e C que satisfazem as condições do problema. Analisando a quantidade de elementos dos conjuntos G e H, temos os seguintes casos possíveis de distribuição:

- **Caso 1:** G e H têm um elemento cada.

  Neste caso, vamos distribuir os quatro elementos $m,\ p,\ q$ e t em quatro etapas: a escolha do elemento de H, a escolha do elemento de G, a escolha da região onde o terceiro elemento será colocado e a escolha da região na qual o quarto elemento será colocado.

  – A escolha do elemento de H pode ser feita de 4 modos distintos.

  – A escolha do elemento de G pode ser feita de 3 modos distintos.

Os outros dois elementos podem ser colocados em qualquer uma das outras cinco regiões, sem restrições. Portanto:

— A colocação do terceiro elemento poderá ser feita de 5 modos distintos.

— A colocação do quarto elemento poderá ser feita de 5 modos distintos.

Pelo Princípio Multiplicativo, podemos fazer a distribuição dos elementos neste caso de

$4 \times 3 \times 5 \times 5 = \boxed{300}$ maneiras distintas. (i)

- **Caso 2:** G tem dois elementos e H tem apenas um.

  Neste caso, vamos distribuir os quatro elementos m, p, q e t em três etapas: a escolha dos elementos de G, a escolha do elemento de H e a escolha da região onde o quarto elemento será colocado.

  — A escolha dos dois elementos de G pode ser feita de $C_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6$ modos distintos.

  — A escolha do elemento de H pode ser feita de 2 modos distintos.

  O último elemento pode ser colocado em qualquer uma das outras cinco regiões, sem restrições. Logo:

  — A colocação do quarto elemento poderá ser feita de 5 modos distintos.

  Pelo Princípio Multiplicativo, podemos fazer a distribuição dos elementos neste caso de

  $6 \times 2 \times 5 = \boxed{60}$ maneiras distintas. (ii)

- **Caso 3:** H tem dois elementos e G tem apenas um.

  De maneira análoga ao caso anterior, neste caso, podemos fazer a distribuição dos elementos de

  $\boxed{60}$ maneiras distintas. (iii)

- **Caso 4:** G tem três elementos e H tem apenas um.

  Neste caso, vamos apenas escolher o elemento de H; os outros três elementos necessariamente serão os elementos de G. Assim, como a escolha do elemento de H pode ser feita de 4 modos distintos, neste caso podemos fazer a distribuição dos elementos de

  $\boxed{4}$ maneiras distintas. (iv)

- **Caso 5:** H tem três elementos e G tem apenas um.

  Neste caso, vamos apenas escolher o elemento de G; os outros três elementos necessariamente estarão em H. Como no caso anterior, neste caso podemos fazer a distribuição dos elementos de

  $\boxed{4}$ maneiras distintas. (v)

- **Caso 6:** G e H têm dois elementos cada.

  Neste caso, vamos distribuir os quatro elementos em duas etapas: a escolha dos elementos de G e a escolha do elemento de H.

  — A escolha dos dois elementos de G pode ser feita de $C_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6$ modos distintos.

  Escolhidos os dois elementos de G, os elementos de H ficam automaticamente escolhidos; assim, neste caso, podemos fazer a distribuição dos elementos de

  $\boxed{6}$ maneiras distintas. (vi)

Dessa forma, por (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi) e pelo Princípio Aditivo, podemos distribuir os elementos m, p, q e t nas sete regiões que compõem o diagrama que fizemos de

$300 + 60 + 60 + 4 + 4 + 6 = 434$ maneiras distintas.

Consequentemente, podemos definir conjuntos A, B e C que atendam às condições do problema de $\boxed{434}$ maneiras diferentes.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.