



.Problema para ajudar na escola: Soluções de uma equação modular



Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Quantas soluções reais tem a equação $|x - |2x + 1|| = 3$?



Lembretes

(1) Definição: Se A é um número real, chamamos de "**módulo de A** " ou "**valor absoluto de A** " ao número real denotado por $|A|$ e assim definido:

$$|A| = \begin{cases} A, & \text{se } A \geq 0 \\ -A, & \text{se } A < 0 \end{cases} .$$

(2) Propriedade importante: Sejam A e B números reais, com $B > 0$. Se $|A| = B$, então $A = B$ ou $A = -B$.
Em símbolos:

$$|A| = B \Rightarrow A = B \text{ ou } A = -B .$$

Solução

Utilizando o **Lembrete (2)**, temos que:

$$|x - |2x + 1|| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x - |2x + 1| = -3 \\ \text{ou} \\ x - |2x + 1| = 3 \end{cases} ;$$

assim, temos duas novas equações modulares para resolver: a solução da equação original será a união das soluções dessas duas equações. Vamos lá!

• **Equação 1:** $x - |2x + 1| = -3$

Podemos reescrever a **Equação 1** como $|2x + 1| = x + 3$ e é nessa forma que vamos resolvê-la.

Observe, inicialmente, que temos uma condição de existência para a igualdade $|2x + 1| = x + 3$, já que $|2x + 1| \geq 0$:

▶ $x + 3 \geq 0$, ou seja, $x \geq -3$.

Isso significa que, depois de efetuarmos os cálculos, devemos verificar se os valores encontrados satisfazem a condição de serem iguais a -3 ou maiores do que -3 .

Poderíamos resolver a equação $|2x + 1| = x + 3$ como uma equação modular, mas vamos pegar um caminho diferente, elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado. Acompanhem:

$$\begin{aligned} (|2x + 1|)^2 &= (x + 3)^2 \\ (2x + 1)^2 &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

Assim,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6} ,$$

donde

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 1 &= x^2 + 6x + 9 \\ 3x^2 - 2x - 8 &= 0. \end{aligned}$$

$$x = \frac{2 + 10}{6} = 2$$

ou

$$x = \frac{2 - 10}{6} = \frac{-4}{3}.$$

Sabemos que $2 > -3$ e que $\frac{-4}{3} > -3$; assim, ambos os valores são, de fato, soluções da **Equação 1** e, consequentemente, da equação inicial.

• **Equação 2:** $x - |2x + 1| = 3$

Podemos reescrever a **Equação 2** como $|2x + 1| = x - 3$ e é nessa forma que vamos resolvê-la.

Observe que aqui temos também uma condição de existência para a igualdade em questão:

► $x - 3 \geq 0$, ou seja, $x \geq 3$.

Isso significa que devemos verificar se os valores que encontraremos satisfazem a condição de serem iguais a 3 ou maiores do que 3.

Vamos resolver a equação $|2x + 1| = x - 3$ elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado. Vejam:

$$\begin{aligned} (|2x + 1|)^2 &= (x - 3)^2 \\ (2x + 1)^2 &= x^2 - 6x + 9 \\ 4x^2 + 4x + 1 &= x^2 - 6x + 9 \\ 3x^2 + 10x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

e, assim,

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 96}}{6} = \frac{-10 \pm 14}{6},$$

donde

$$x = \frac{-10 + 14}{6} = \frac{2}{3}$$

ou

$$x = \frac{-10 - 14}{6} = -4.$$

Vejam que nenhum desses valores satisfaz a condição de existência da igualdade $|2x + 1| = x - 3$, já que $\frac{2}{3} < 3$ e $-4 < 3$. Dessa forma, a **Equação 2** não contribui com novas soluções para a equação original.

Pelo exposto, concluímos que a equação $|x - |2x + 1|| = 3$ tem apenas duas soluções reais: 2 e $\frac{-4}{3}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

