



## .Problema para ajudar na escola: Soluções de uma equação modular



### Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Quantas soluções reais tem a equação  $|x - |2x + 1|| = 3$  ?



### Lembretes

**(1) Definição:** Se  $A$  é um número real, chamamos de "**módulo de  $A$** " ou "**valor absoluto de  $A$** " ao número real denotado por  $|A|$  e assim definido:

$$|A| = \begin{cases} A, & \text{se } A \geq 0 \\ -A, & \text{se } A < 0 \end{cases} .$$

**(2) Propriedade importante:** Sejam  $A$  e  $B$  números reais, com  $B > 0$ .

Se  $|A| = B$ , então  $A = B$  ou  $A = -B$ .

Em símbolos:

$$|A| = B \Rightarrow A = B \text{ ou } A = -B .$$

### Solução

Utilizando o **Lembrete (2)**, temos que:

$$|x - |2x + 1|| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x - |2x + 1| = -3 \\ \text{ou} \\ x - |2x + 1| = 3 \end{cases} ;$$

assim, temos duas novas equações modulares para resolver: a solução da equação original será a união das soluções dessas duas equações. Vamos lá!

• **Equação 1:**  $x - |2x + 1| = -3$

Podemos reescrever a **Equação 1** como  $|2x + 1| = x + 3$  e é nessa forma que vamos resolvê-la.

Observe, inicialmente, que temos uma condição de existência para a igualdade  $|2x + 1| = x + 3$ , já que  $|2x + 1| \geq 0$ :

▶  $x + 3 \geq 0$ , ou seja,  $x \geq -3$ .

Isso significa que, depois de efetuarmos os cálculos, devemos verificar se os valores encontrados satisfazem a condição de serem iguais a  $-3$  ou maiores do que  $-3$ .

Poderíamos resolver a equação  $|2x + 1| = x + 3$  como uma equação modular, mas vamos pegar um caminho diferente, elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado. Acompanhem:

$$\begin{aligned} (|2x + 1|)^2 &= (x + 3)^2 \\ (2x + 1)^2 &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

Assim,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6},$$

donde

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 1 &= x^2 + 6x + 9 \\ 3x^2 - 2x - 8 &= 0. \end{aligned}$$

$$x = \frac{2 + 10}{6} = 2$$

ou

$$x = \frac{2 - 10}{6} = \frac{-4}{3}.$$

Sabemos que  $2 > -3$  e que  $\frac{-4}{3} > -3$ ; assim, ambos os valores são, de fato, soluções da **Equação 1** e, conseqüentemente, da equação inicial.

• **Equação 2:**  $x - |2x + 1| = 3$

Podemos reescrever a **Equação 2** como  $|2x + 1| = x - 3$  e é nessa forma que vamos resolvê-la.

Observe que aqui temos também uma condição de existência para a igualdade em questão:

►  $x - 3 \geq 0$ , ou seja,  $x \geq 3$ .

Isso significa que devemos verificar se os valores que encontraremos satisfazem a condição de serem iguais a 3 ou maiores do que 3.

Vamos resolver a equação  $|2x + 1| = x - 3$  elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado. Vejam:

$$\begin{aligned} (|2x + 1|)^2 &= (x - 3)^2 \\ (2x + 1)^2 &= x^2 - 6x + 9 \\ 4x^2 + 4x + 1 &= x^2 - 6x + 9 \\ 3x^2 + 10x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

e, assim,

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 96}}{6} = \frac{-10 \pm 14}{6},$$

donde

$$x = \frac{-10 + 14}{6} = \frac{2}{3}$$

ou

$$x = \frac{-10 - 14}{6} = -4.$$

Vejam que nenhum desses valores satisfaz a condição de existência da igualdade  $|2x + 1| = x - 3$ , já que  $\frac{2}{3} < 3$  e  $-4 < 3$ . Dessa forma, a **Equação 2** não contribui com novas soluções para a equação original.

Pelo exposto, concluímos que a equação  $|x - |2x + 1|| = 3$  tem apenas duas soluções reais:  $2$  e  $\frac{-4}{3}$ .

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

