Clubes de Matemática da OBMEP

.Problema para ajudar na escola: Quantos números?

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Determine a quantidade de números naturais $\boxed{n = abcd}$, de quatro dígitos distintos e não nulos, tais que

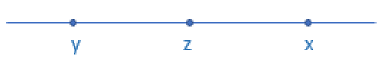
- $a > b$,
- $c > b$,
- $c > d$.

Uma ajuda para os mais novos

Para uma visualização da solução que apresentaremos, utilizaremos uma representação geométrica para os algarismos a, b, c, d.

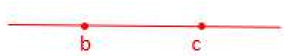
Esse tipo de representação é comum para quem já estudou geometria analítica, mas quem ainda não estudou esse assunto não terá dificuldade de entender o que faremos.

- Vamos representar dois ou mais números naturais distintos como pontos de um segmento de reta, de modo que um número maior seja sempre colocado à direita de um menor.
  Por exemplo, se x, y, z são números naturais tais que $y < z < x$, podemos representá-los como indicado abaixo.



Solução

Observe que, pelos dados do problema, $b < c$ e $d < c$. Assim, olhando os números b, c, d como pontos de um segmento, c está à direita de b e à direita de d.



No entanto, não temos informações comparativas entre b e d; assim, temos que considerar as duas situações possíveis:

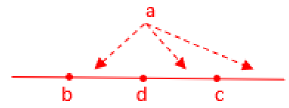
► $b < d < c$

► $d < b < c$

Mas, e o algarismo a?
A única informação que temos sobre a é a de que $a > b$; dessa forma, vamos inserir essa informação nas duas situações acima descritas. Acompanhe...

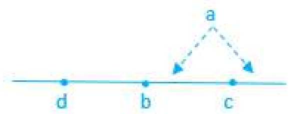
► Do primeiro caso, $b < d < c$, resulta que:

- $b < a < d < c$ ou
- $b < d < a < c$ ou
- $b < d < c < a$.



► Do segundo caso, $d < b < c$, resulta que:

- $d < b < a < c$ ou
- $d < b < c < a$.



Temos, então cinco possibilidades para os algarismos que satisfazem as condições do problema. Embora cada uma dessas possibilidades gere números $n = abcd$ distintos, podemos contá-las da mesma maneira. Assim, só precisamos contar de quantas maneiras podemos escolher quatro dentre os números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; cada maneira gera cinco números n, cada um satisfazendo uma das cinco condições. Por exemplo, se temos os algarismos $2, 8, 1, 5$, então:

- fazemos $b = 1, \ a = 2, \ d = 5, \ c = 8$ e obtemos $\boxed{n = 2185}$;
- fazemos $b = 1, \ d = 2, \ a = 5, \ c = 8$ e obtemos $\boxed{n = 5182}$;
- fazemos $b = 1, \ d = 2, \ c = 5, \ a = 8$ e obtemos $\boxed{n = 8152}$;
- fazemos $d = 1, \ b = 2, \ a = 5, \ c = 8$ e obtemos $\boxed{n = 5281}$;
- fazemos $d = 1, \ b = 2, \ c = 5, \ a = 8$ e obtemos $\boxed{n = 8251}$.

► Os quatro números devem ser escolhidos dentre os nove possíveis sem nos preocuparmos com a ordem, já que, depois de escolhidos, eles serão ordenados convenientemente de cinco formas diferentes. A escolha de quatro entre os nove números poderá ser feita de $C_{9,4}$ modos distintos, onde $C_{9,4}$ indica uma combinação dos 9 elementos tomados 4 a 4:

$$C_{9,4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{(9-4)!\,4!} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126 \text{ modos.}$$

► Cada uma das 126 escolhas gera cinco números que atendem as exigências do problema; assim, o total de números que atendem as condições do problema é $\boxed{126 \times 5 = 630}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.