



.Problema para ajudar na escola: Quanto vale a secante?



Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Se θ é um ângulo agudo tal que $\boxed{\operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cotg} \theta = \sqrt{5}}$, determine $\sec \theta$.

Solução

Dentre as várias identidades trigonométricas, vamos utilizar uma na qual aparecem a cossecante e a cotangente de um ângulo:

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{cotg}^2 \theta = 1$$

e, fatorando essa identidade, obtemos que $(\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cotg} \theta) \times (\operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cotg} \theta) = 1$. (i)

Mas, das informações do problema, sabemos que $\operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cotg} \theta = \sqrt{5}$; logo, de (i), vem que:

$$(\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cotg} \theta) \times (\operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cotg} \theta) = 1$$

$$(\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cotg} \theta) \times \sqrt{5} = 1$$

$$\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cotg} \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Subtraindo as equações $\boxed{\operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cotg} \theta = \sqrt{5}}$ e $\boxed{\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cotg} \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}}$, segue que:

$$2 \operatorname{cotg} \theta = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$2 \operatorname{cotg} \theta = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Como $\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$, então $\operatorname{tg} \theta = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Finalmente, sabemos que $\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$, portanto:

$$\sec^2 \theta = \operatorname{tg}^2 \theta + 1$$

$$\sec^2 \theta = (\operatorname{tg} \theta)^2 + 1$$

$$\sec^2 \theta = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1$$

$$\sec^2 \theta = \frac{5}{4} + 1$$

$$\sec^2 \theta = \frac{9}{4}$$

$$\sec \theta = \pm \frac{3}{2}.$$

Sendo θ um ângulo agudo, concluímos que $\boxed{\sec \theta = \frac{3}{2}}$.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

